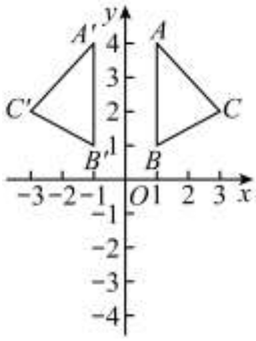
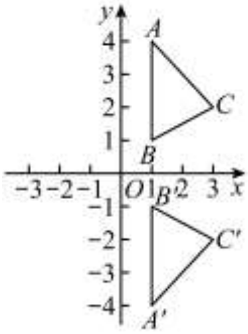
2024北京汇文中学初三（上）期末

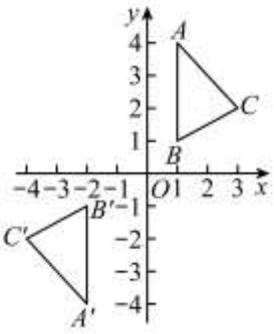
数　　学

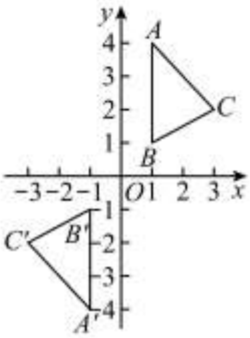
一、选择题（每题2分，共16分）

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于原点 O 成中心对称的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

2. 在平面内与点 P 的距离为1cm的点的个数为（　）

A. 无数个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

3. 一个扇形的圆心角是120°，面积为3πcm²，那么这个扇形的半径是（　　）

A. 1cm　　B. 3cm　　C. 6cm　　D. 9cm

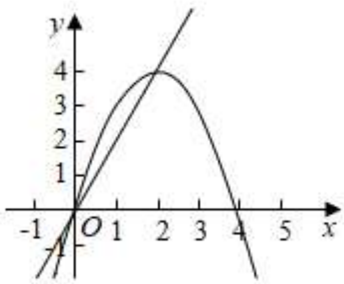
4. 已知 AB 是半径为2的圆的一条弦，则 AB 的长不可能是（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 不透明的袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外两个小球无其他差别，从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么第一次摸到红球、第二次摸到绿球的概率是（　）

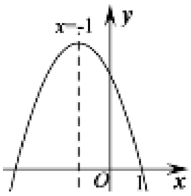
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 如图，直线 $y_1=2x$ 和抛物线 $y_2=-x^2+4x$，当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是（　）



A. $0<x<2$　　B. $x<0$ 或 $x>2$　　C. $x<0$ 或 $x>4$　　D. $0<x<4$

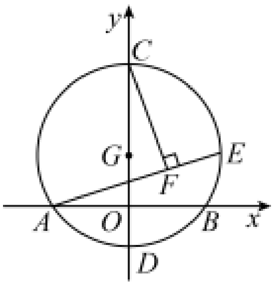
7. 如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点（1，0），对称轴是直线 $x=-1$，下列结论错误的是（　）



A. $abc>0$　　B. $b^2-4ac>0$

C. $2a-b=0$　　　　　　　　　　D. $3a+2c<0$

8. 如图，以 $G(0,1)$ 为圆心，半径为2的圆与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于 C，D 两点，点 E 为⊙O 上一动点，$CF\perp AE$ 于 F，当点 E 在⊙O 的运动过程中，线段 FG 的长度的最小值为（　）



A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

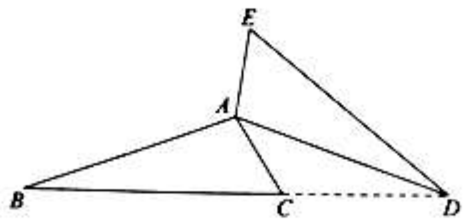
二、填空题（每题 2 分，共 16 分）

9. 下列各数：－2，－1，0，2，3，是一元二次方程 $x^2+3x+2=0$ 的根的是________.

10. 已知圆心角 $\angle AOB$ 的度数为 $100°$，点 C 在⊙O 的圆周上，则圆周角 $\angle ACB$ 的度数是________.

11. 用配方法将二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-4$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为________.

12. 如图，将 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转 $140°$，得到 ΔADE，这时点 B,C,D 恰好在同一直线上，则 $\angle B$ 的度数为______.

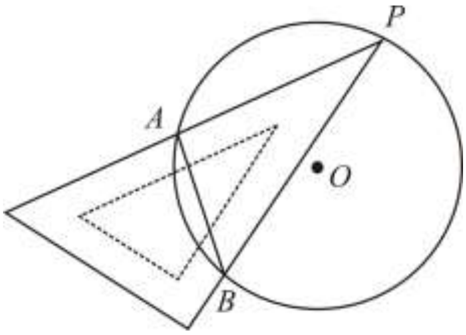


13. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 图像上部分点横坐标、纵坐标的对应值如下表：

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	-3	-4	-3	0	5	…

直接写出该二次函数的图像与 x 轴的交点坐标______.

14. 如图，一块直角三角板的 $30°$ 角的顶点 P 落在⊙O 上，两边分别交⊙O 于 A，B 两点，若⊙O 的直径为8，则弦 AB 的长为______.



15. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知二次函数 $y=-x^2-2ax-1$.

（1）该二次函数的顶点坐标 $P\left(x_0,y_0\right)$（用含 a 的代数式表示）_____；

（2）若对于点 P 总有 $y_0\geq k$，则满足条件的最大整数 k 的值为_____.

16. 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M，给出如下定义：若在图形 M 上存在点 Q，使得 $OQ=kOP$，k 为正数，则称点 P 为图形 M 的 k 倍等距点.

已知点 $A(-2,2)$，$B(2,2)$.

（1）在点 $C(1,0)$，$D(0,-2)$，$E(1,1)$ 中，线段 AB 的 2 倍等距点是_____；

（2）线段 AB 的所有 2 倍等距点形成图形的面积是_____.

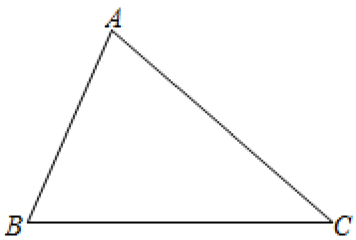
三、解答题（共 68 分）

17. 解方程

（1）$x^2-4x+3=0$；

（2）$4x(x-1)=3$

18. 已知：如图，△ABC.



求作：点 D（点 D 与点 B 在直线 AC 的异侧），使得 $DA=DC$，且∠ADC+∠ABC=180°.

作法：①分别作线段 AC 的垂直平分线 l_1 和线段 BC 的垂直平分线 l_2，直线 l_1 与 l_2 交于点 O；

②以点 O 为圆心，OA 的长为半径画圆，⊙O 与 l_1 在直线 BC 上方的交点为 D；

③连接 DA，DC.

所以点 D 就是所求作的点.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 OA，OB，OC.

∵直线 l_1 垂直平分 AC，点 O，D 都在直线 l_1 上，

∴$OA=OC$，$DA=DC$.

∵直线 l_2 垂直平分 BC，点 O 在直线 l_2 上，

∴______=______.

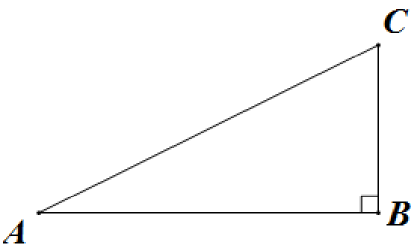
∴$OA=OB=OC$.

∴点 A，B，C 都在⊙O 上.

∵点 D 在⊙O 上，

∴$\angle ADC+\angle ABC=180°$.（______）（填推理的依据）

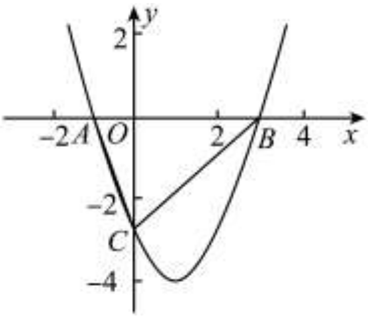
19. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$BC=1$，$AC=\sqrt{5}$.



（1）以点 B 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle A'BC'$，请用尺规作图作出变换后的图形（保留作图痕迹，不写作法）；

（2）求点 A 和点 A' 之间的距离.

20. 已知二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，求：



（1）点 A、B、C 的坐标；

（2）$\triangle ABC$ 的面积.

21. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$.

（1）当 $b=a+2$ 时，利用根的判别式判断方程根的情况；

（2）若方程有两个相等的实数根，写出一组满足条件的 a，b 的值，并求此时方程的根.

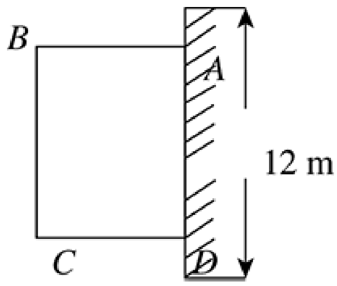
22. 圆周率 π 是无限不循环小数．历史上，祖冲之、刘徽、韦达、欧拉等数学家都对 π 有过深入的研究．目前，超级计算机已计算出 π 的小数部分超过 31.4 万亿位．有学者发现，随着 π 小数部分位数的增加，0~9 这 10 个数字出现的频率趋于稳定，接近相同.

（1）从π的小数部分随机取出一个数字，估计数字是6的概率为________；

（2）某校进行校园文化建设，拟从以上4位科学家的画像中随机选用2幅，求其中有一幅是祖冲之的概率.（用画树状图或列表方法求解）

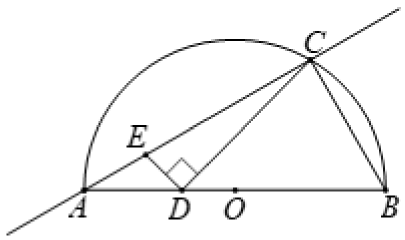
23. 如图，有长为24m的篱笆，围成矩形花圃，且花圃的长可借用一段墙体.（墙体的最大可用长度为12m）.



（1）如果围成的花圃的面积为$54m^2$，试求AB的长；

（2）按照题目的设计要求，能围成面积比$54m^2$更大的花圃吗？如果能，请求出最大面积，并说明围法；如果不能，请说明理由.

24. 如图，$\overset{\frown}{AB}$是直径AB所对的半圆弧，点C在$\overset{\frown}{AB}$上，且$\angle CAB=30°$，D为AB边上的动点（点D与点B不重合），连接CD，过点D作$DE\perp CD$交直线AC于点E.



小明根据学习函数的经验，对线段AE，AD长度之间的关系进行了探究.

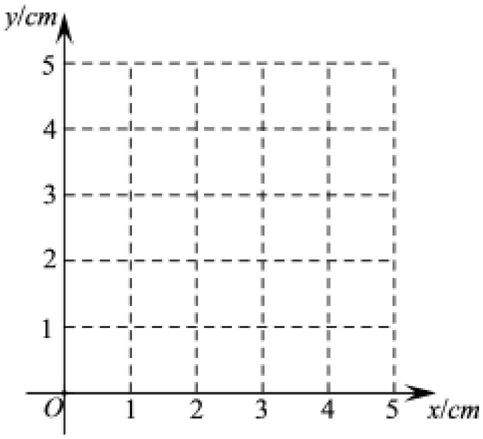
下面是小明的探究过程，请补充完整：

（1）对于点D在AB上的不同位置，画图、测量，得到线段AE，AD长度的几组值，如下表：

	位置1	位置2	位置3	位置4	位置5	位置6	位置7	位置8	位置9	
AE/cm	0.00	0.41	0.77	1.00	1.15	1.00	0.00	1.00	4.04	…
AD/cm	0.00	0.50	1.00	1.41	2.00	2.45	3.00	3.21	3.50	…

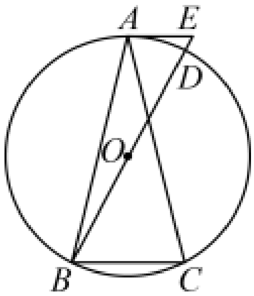
在 AE，AD 的长度这两个量中，确定_______的长度是自变量，________的长度是这个自变量的函数；

（2）在下面的平面直角坐标系 xOy 中，画出（1）中所确定的函数的图象；



（3）结合画出的函数图象，解决问题：当 $AE=\frac{1}{2}AD$ 时，AD 的长度约为________cm(结果精确到 0.1).

25. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，BD 是 $\odot O$ 的直径，$AB=AC$，$AE\parallel BC$，E 为 BD 的延长线与 AE 的交点.



（1）求证：AE 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $\angle ABC=75°$，$BC=2$，求 CD 和 AE 长.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_1+t,y_2\right)$ 为抛物线 $y=-x^2+4x$ 上两点，其中 $t>0$，记抛物线在 M，N 两点之间的部分为图象 G.

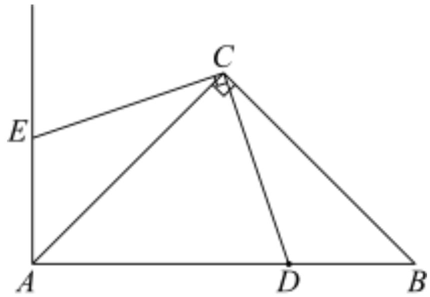
（1）求抛物线对称轴和顶点坐标；

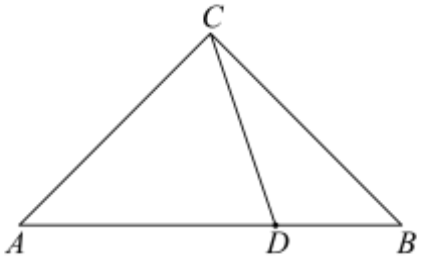
（2）记图象 G 上最高点与最低点的纵坐标之差为 m.

①当 $t=2$，若图象 G 为轴对称图形，求 m 的值；

②若 $x_1=1$，$0<t<4$，求 m 的取值范围.

27. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，点 D 在 AB 边上（不与点 A，B 合），分别过 A，C 作 AB，CD 的垂线交于点 E，连接 BE. 过 C 作 $CF\perp BE$ 交 AB 于点 F.





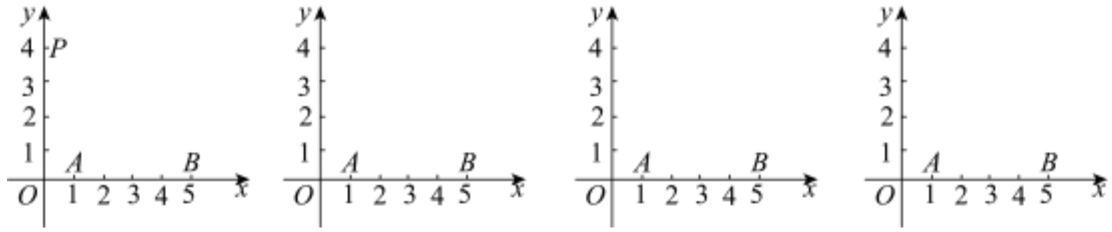
备用图

（1）依题补全图形；

（2）求证：$CE=CD$；

（3）用等式表示线段 AE，AC，AF 间的关系，并证明.

28. 给出如下定义：在平面内，把一个图形 M 上任意一点与另一个图形 N 上任意一点之间的距离的最小值，称为这两个图形 M，N 之间的距离. 已知，在平面直角坐标系中，点 $A\left(1,0\right)$，$B\left(5,0\right)$



（1）若点 $P\left(0,4\right)$

①点 P 到线段 AB 的距离为_____，点 P 到以线段 AB 为直径的圆的距离为___；

②当线段 AB 绕 AB 中点旋转时，则点 P 到线段 AB 距离 d_1 的取值范围为___；

③以 AB 为边，在 x 轴下方做矩形 $ABCD$，其中 BC 平行 y 轴，$BC=2$，当矩形绕着点 $\left(3,-1\right)$ 旋转时，则点 P 到矩形 $ABCD$ 的距离 d_2 的取值范围为______；

（2）当点 P 在圆心 $C\left(m,\sqrt{3}m\right)\left(0<m\leq 3\right)$，半径为1的圆上运动时，求点 P 到线段 AB 的距离 d_3 的取值范围？

参考答案

一、选择题（每题 2 分，共 16 分）

1.【答案】D

【分析】根据关于 y 轴对称的点的坐标特征对 A 进行判断；根据关于 x 轴对称的点的坐标特征对 B 进行判断；根据关于原点对称的点的坐标特征对 C、D 进行判断．

【详解】解：A、$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于 y 轴对称，所以 A 选项不符合题意；

B、$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于 x 轴对称，所以 B 选项不符合题意；

C、$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 对称，所以 C 选项不符合题意；

D、$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于原点 O 对称，所以 D 选项符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查了中心对称：把一个图形绕着某个点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称，这个点叫做对称中心，这两个图形中的对应点叫做关于中心的对称点．中心对称的性质：关于中心对称的两个图形能够完全重合；关于中心对称的两个图形，对应点的连线都经过对称中心，并且被对称中心平分．

2.【答案】A

【分析】根据在平面内到定点的距离等于定长的点组成的图形为圆进行求解即可．

【详解】解：∵在平面内与点 P 的距离为 1cm 的点在以 P 为圆心，以 1cm 长为半径的圆上，

∴在平面内与点 P 的距离为 1cm 的点的个数为无数个，

故选：A．

【点睛】本题主要考查了圆的定义，熟知圆的定义是解题的关键．

3.【答案】B

【分析】根据扇形的面积公式进行计算．

【详解】解：设这个扇形的半径是 $r$cm．

根据扇形面积公式，得 $\dfrac{120\pi r^2}{360}=3\pi$，

解得 $r=\pm3$（负值舍去）．

故答案为 3．

【点睛】本题考查了扇形的面积公式，熟记扇形的面积公式是解决此题的关键．

4.【答案】D

【分析】根据半径求得直径的长，然后利用圆内最长的弦是直径作出判断即可．

【详解】解：∵圆的半径为 2，

∴直径为 4，

∵AB 是一条弦，

∴AB 的长应该小于等于 4，不可能为 5，

故选：D．

【点睛】本题考查了圆的认识，解题的关键是了解圆内最长的弦是直径．

5.【答案】A

【分析】首先根据题意画出树状图，由树状图求得所有等可能的结果与第一次摸到红球，第二次摸到绿球的情况，然后利用概率公式求解即可求得答案．

【详解】解：画树状图得：

∵共有 4 种等可能的结果，第一次摸到红球，第二次摸到绿球有 1 种情况，

∴第一次摸到红球，第二次摸到绿球的概率为 $\frac{1}{4}$，

故选：A．

【点睛】本题考查了画树状法或列表法求概率，列出所有等可能的结果是解决本题的关键．

6.【答案】B

【分析】先求出两个函数图象的交点坐标，当 $y_1>y_2$ 确定直线 y_1 的图象在抛物线 y_2 的上方，由此得到答案．

【详解】解：由 $\begin{cases}y=2x\\y=-x^2+4x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$，

∴两函数图象交点坐标为 $(0,0)$，$(2,4)$，

由图可知，$y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 $x<0$ 或 $x>2$．

故选：B．

【点睛】此题考查求两个函数图象的交点坐标，根据函数图象确定自变量 x 的取值范围，正确解出交点坐标及正确理解函数图象是解题的关键．

7.【答案】D

【分析】根据二次函数的图象与性质即可依次判断各项．

【详解】由二次函数图象开口向下，$a<0$，

函数与 y 轴交于正半轴，$c>0$

对称轴 $x=-1<0$，故 a，b 同号，$b<0$

故 $abc>0$，A 正确；

∵二次函数与 x 轴有两个交点，故 $b^2-4ac>0$，B 正确；

对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=-1$

∴$b=2a$

故 $2a-b=0$，C 正确；

∵$3a+2c=a+2a+2c=a+b+c+c$

∵当 $x=1$ 时，$y=a+b+c=0$

∴$a+b+c+c>0$

故 $3a+2c>0$，D 错误；

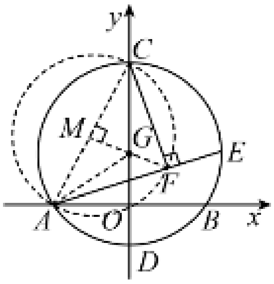
故选 D．

【点睛】本题考查了二次函数图象与系数的关系，解决本题的关键是掌握二次函数的图象和性质及点的坐标特征．

8.【答案】A

【分析】本题考查垂径定理、直角三角形 30 度角的判定和性质、勾股定理等知识连接 AC， 作 $GM \perp AC$，连接 AG，$CF \perp AE$ 可知点 F 在以 AC 为直径的圆 M 上移动，当点 F 在 MG 的延长线上时，FG 的长最小，根据含 30° 的直角三角形的性质和勾股定理求出 FG，MG 即可求解，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题．

【详解】连接 AC， 作 $GM \perp AC$，连接 AG，



∵ $GO \perp AB$，

∴ $OA = OB$，

∵ $G(0,1)$ 为圆心，半径为 2，

∴ $AG = 2$，$OG = 1$，

在 Rt△AGO 中，$AG = 2OG$，

∴ $OA = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

∴ $\angle GAO = 30^\circ$，$\angle AGO = 60^\circ$，

∵ $GC = GA = 2$，

∴ $\angle ACG = \angle CAG$，

∴ $\angle AGO = \angle ACG + \angle CAG$

∴ $\angle ACG = \angle CAG = 30^\circ$，

∴ $AC = 2AO = 2\sqrt{3}$，$MG = \frac{1}{2}GC = 1$，

∴ $AM = \sqrt{3}$，

$\because CF \perp AE$，

$\therefore$点F在以AC为直径的圆M上移动，

当点F在MG的延长线上时，FG的长最小，最小值为$FG = FM - MG = \sqrt{3} - 1$，

故选：A．

二、填空题（每题2分，共16分）

9.【答案】-1和-2

【分析】直接用因式分解的方法求出一元二次方程$x^2 + 3x + 2 = 0$的根即可得到答案．

【详解】解：$\because x^2 + 3x + 2 = 0$，

$\therefore \left(x+1\right)\left(x+2\right) = 0$，

解得$x_1 = -1$，$x_2 = -2$，

$\therefore$-2，-1，0，2，3，中是方程$x^2 + 3x + 2 = 0$的根的是-2，-1，

故答案为：-1和-2．

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程和一元二次方程根的定义，熟知解一元二次方程的方法是解题的关键．

10.【答案】$50°$或$130°$

【分析】应根据点C在劣弧上和优弧上两种情况进行讨论，然后分别利用圆周角定理进行解答．

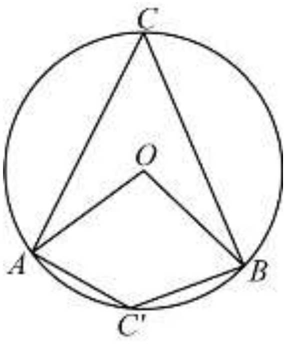
【详解】解：$\because$点C在$\odot O$的圆周上，

$\therefore$点C可能在优弧上或者劣弧上．

当点C在优弧上时，如图所示，

$\because \angle AOB$的度数为$100°$，

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 50°$．



当点C在劣弧上时，如图所示，

$\because \angle ACB = 50°$，

$\therefore \angle AC'B = 180° - 50° = 130°$．

故答案为：$50°$或$130°$．

【点睛】本题考查了圆周角定理，圆内接四边形的性质，分情况讨论是解题的关键．

11.【答案】$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-6$

【分析】本题考查了一般式化顶点式，熟练掌握配方法是解答本题的关键．根据配方法求解即可．

【详解】解：$y=\frac{1}{2}x^2-2x-4$

$=\frac{1}{2}\left(x^2-4x\right)-4$

$=\frac{1}{2}\ x^2-4x+4-4\ \ -4$

$=\frac{1}{2}(x-2)^2-2-4$

$=\frac{1}{2}\ x-2\ ^2-6$.

故答案为：$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-6$.

12.【答案】20°

【分析】先判断出∠BAD=140°，AD=AB，再判断出△BAD 是等腰三角形，最后用三角形的内角和定理即可得出结论．

【详解】∵将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 140°，得到△ADE，

∴∠BAD=140°，AD=AB，

∵点 B，C，D 恰好在同一直线上，

∴△BAD 是顶角为 140°的等腰三角形，

∴∠B=∠BDA，

∴∠B=$\frac{1}{2}$ (180°−∠BAD)=20°，

故答案为 20°

【点睛】此题考查旋转的性质，等腰三角形的判定与性质，三角形内角和定理，解题关键在于判断出△BAD 是等腰三角形

13.【答案】$(-1,0)$，$(3,0)$

【分析】利用表中数据和抛物线的对称性得到抛物线的对称轴为直线 $x=1$，再利用抛物线的对称性写出点 $(3,0)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点即可．

【详解】解：∵抛物线经过点 $(0,-3),(2,-3)$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

∵抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(3,0)$，

∴抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $\left(-1,0\right)$，

即该二次函数图象与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$，$(3,0)$．

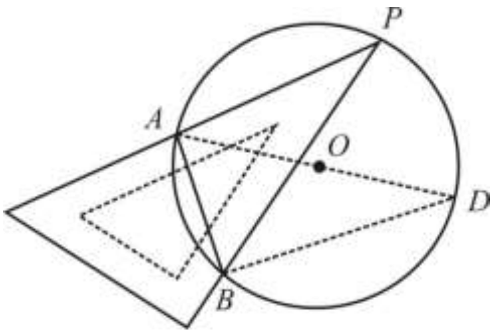
故答案为：$(-1,0)$，$(3,0)$．

【点睛】本题考查了抛物线与 x 轴的交点：把求二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）与 x 轴的交点坐标问题转化为解关于 x 的一元二次方程．也考查了二次函数的性质．

14.【答案】4

【分析】连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 D，连接 BD，根据同弧所对的圆周角相等得出 $\angle D=\angle P=30°$，$\angle ABD=90°$，再由含30度角的直角三角形的性质即可得出结论．

【详解】解：连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 D，连接 BD，



$\because \angle P=30°$，

$\therefore \angle D=\angle P=30°$．

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径，$AD=8$，

$\therefore \angle ABD=90°$，

$\therefore AB=\frac{1}{2}AD=4$．

故答案为：4．

【点睛】本题考查的是同弧所对的圆周角相等，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键．

15.【答案】 ①. $\left(-a,a^2-1\right)$； ②. -1．

【分析】（1）把 $y=-x^2-2ax-1$ 配成顶点式即可；

（2）利用二次函数性质求最值即可；

此题考查了二次函数的图象及其性质，解题的关键是熟练掌握图象及其性质的应用．

【详解】解：（1）由二次函数 $y=-x^2-2ax-1$ 得，

$y=-x^2-2ax-1=-\left(x+a\right)^2+a^2-1$，

$\therefore$ 顶点坐标为：$\left(-a,a^2-1\right)$，

故答案为：$\left(-a,a^2-1\right)$；

（2）由（1）得：顶点坐标为 $\left(-a,a^2-1\right)$，

$\therefore a^2-1\geq k$，即 $k\leq a^2-1$，

则满足条件的最大整数 k 的值为 -1，

故答案为：-1．

16.【答案】　①. 点C和点E；　②. 见解析．

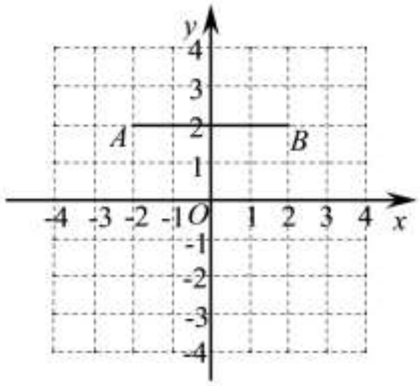
【分析】（1）先设Q为线段AB上一点，再根据图可知OQ的取值范围，由题意得$OQ=2OP$，可求出OP的取值范围，即可求出满足条件的点；

（2）由（1）知，线段AB的所有2倍等距点形成图形，再根据图形求得面积，

此题考查了新定义，解题的关键是读懂“等距点”的定义，根据概念解决问题．

【详解】（1）设Q为线段AB上一点，

则由图可知，



OQ的取值范围是$2\le OQ\le 2\sqrt{2}$，

$\because$ $C(1,0)$，$D(0,-2)$，$E(1,1)$，

$\therefore OC=1$，$OD=2$，$OE=\sqrt{2}$，

设线段AB的2倍等距点为P，

则$OQ=2OP$，

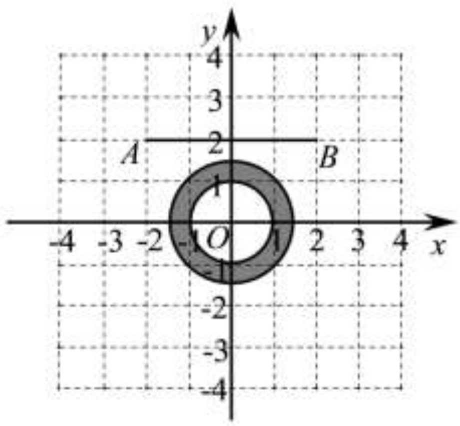
$\therefore 1\le OP\le\sqrt{2}$，

$\therefore$点C，E为线段AB的2倍等距点，

故答案为：点C和点E；

（2）由（1）可知$1\le OP\le\sqrt{2}$，

$\therefore$线段AB的所有2倍等距点形成图形，如图，



由图可知，该图形是环形，

∴等距点形成图形的面积为$S=\left(\sqrt{2}\right)^2\pi-1^2\times\pi=\pi$，

故答案为：π.

三、解答题（共68分）

17.【答案】（1）$x_1=1$，$x_2=3$

（2）$x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$

【分析】（1）根据因式分解法解一元二次方程即可；

（2）根据公式法解一元二次方程即可

【小问1详解】

解：$x^2-4x+3=0$，

$\left(x-1\right)\left(x-3\right)=0$，

$\therefore x-1=0$或$x-3=0$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=3$；

【小问2详解】

$4x\left(x-1\right)=3$，

$\therefore 4x^2-4x-3=0$，

$\because a=4$，$b=-4$，$c=-3$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=16+16\times3=64>0$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{4\pm8}{8}$，

$\therefore x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

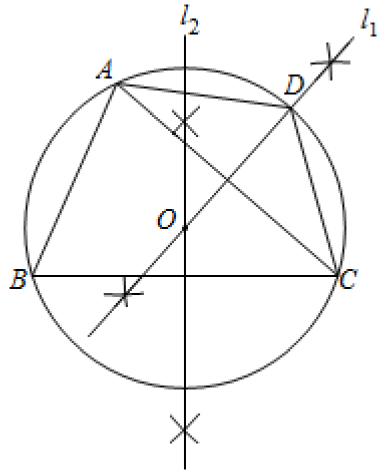
18.【答案】（1）见解析　（2）OB，OC，圆内接四边形对角互补

【分析】（1）根据题意作出图形即可；

（2）利用线段垂直平分线的性质得$OB=OC$，$OA=OC$，$DA=DC$，则可判断点A、B、C都在$\odot O$上，然后根据圆内接四边形的性质得到$\angle ADC+\angle ABC=180°$.

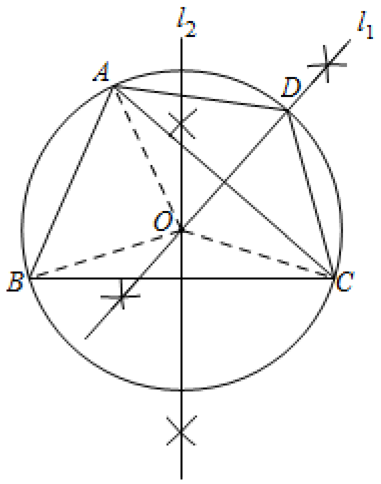
【小问1详解】

解：如图，点D就是所求作的点.



【小问 2 详解】

证明：连接 OA，OB，OC.



∵直线 l_1 垂直平分 AC，点 O，D 都在直线 l_1 上，

∴$OA=OC$，$DA=DC$.

∵直线 l_2 垂直平分 BC，点 O 在直线 l_2 上，

∴$OB=OC$.

∴$OA=OB=OC$.

∴点 A，B，C 都在⊙O 上.

∵点 D 在⊙O 上，

∴$\angle ADC+\angle ABC=180°$.（圆内接四边形对角互补）

故答案为：OB，OC，圆内接四边形对角互补.

【点睛】本题考查了基本作图—作已知线段的垂直平分线，内接四边形的性质，正确掌握三角形外接圆作法是解题关键.

19.【答案】(1) 作图见解析；

(2) $2\sqrt{2}$.

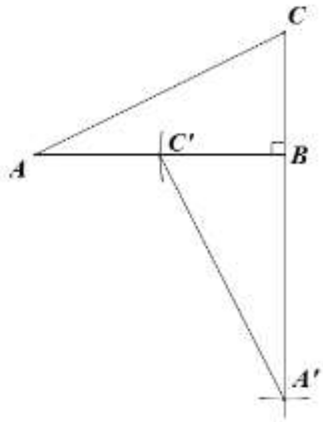
【分析】(1) 以 B 为圆心 BC 长度为半径画弧交 AB 于点 C'，AB 长为半径画弧交 CB 延长线于点 A'，连接 $A'C'$ 即可；

（2）连接 AA'，然后通过勾股定理即可求解；

此题考查了旋转作图和勾股定理，解题的关键是熟练掌握以上知识点的应用．

【小问 1 详解】

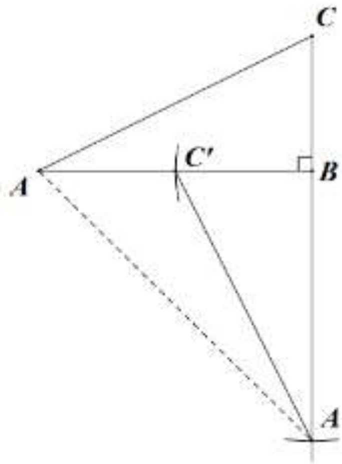
如图，以 B 为圆心 BC 长度为半径画弧交 AB 于点 C'， AB 长为半径画弧交 CB 延长线于点 A'，连接 $A'C'$，



∴ $\triangle A'BC'$ 即为所求；

【小问 2 详解】

如图，连接 AA'，



由（1）得： $AB = A'B$， $\angle ABC = \angle A'BA = 90^\circ$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2} = 2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABA'$ 中，由勾股定理得： $AA' = \sqrt{AB^2 + A'B^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ．

20.【答案】（1） $A\left(-1,0\right)$； $B(3,0)$； $C\left(0,-3\right)$

（2）6

【分析】（1）根据题意得出求出图象与 x 轴以及 y 轴交点坐标；

（2）根据 A，B，C 的坐标求出 AB， CO 长，即可求出 $S_{\triangle ABC}$ 的值．

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$，则 $y=-3$，

$\therefore C(0,-3)$；

令 $y=0$，则 $x^2-2x-3=0$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=3$，

$\therefore A(-1,0)$；$B(3,0)$.

【小问 2 详解】

解：$\because A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,-3)$

$\therefore AB=4$，$OC=3$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

【点睛】本题主要考查了求二次函数与坐标轴的交点坐标，三角形面积的计算，解题的关键熟练进行计算.

21.【答案】(1）方程有两个不相等的实数根；(2）$b=-2$，$a=1$ 时，$x_1=x_2=-1$.

【分析】(1）求出根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$，判断其范围，即可判断方程根的情况.

（2）方程有两个相等的实数根，则 $\Delta=b^2-4ac=0$，写出一组满足条件的 a，b 的值即可.

【详解】(1）解：由题意：$a\neq0$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$，

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根.

（2）答案不唯一，满足 $b^2-4ac=0$（$a\neq0$）即可，例如：

解：令 $a=1$，$b=-2$，则原方程为 $x^2-2x+1=0$，

解得：$x_1=x_2=1$.

【点睛】考查一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$，

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根.

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根.

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

22.【答案】(1）$\frac{1}{10}$；(2）见解析，$\frac{1}{2}$

【分析】(1)这个事件中有 10 种等可能性,其中是 6 的有一种可能性,根据概率公式计算即可;

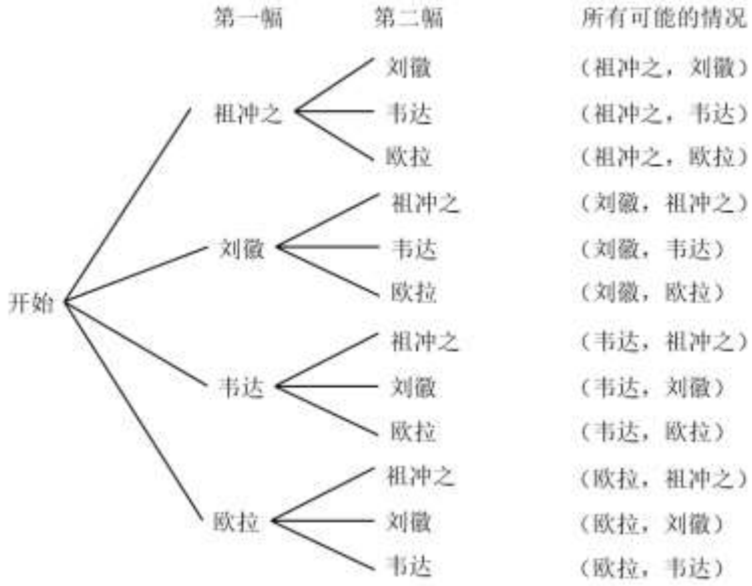
(2)画出树状图计算即可.

【详解】(1）$\because$这个事件中有 10 种等可能性,其中是 6 的有一种可能性,

$\therefore$数字是 6 的概率为$\frac{1}{10}$,

故答案为：$\frac{1}{10}$；

（2）解：画树状图如图所示：



∵共有 12 种等可能的结果，其中有一幅是祖冲之的画像有 6 种情况.

∴ P（其中有一幅是祖冲之）$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了概率公式计算，画树状图或列表法计算概率，熟练掌握概率计算公式，准确画出树状图或列表是解题的关键.

23.【答案】（1）9m；（2）能，最大面积为 72m²，此时 AB 长为 6m，CD 长为 12m

【分析】（1）设 AB 的长为 x, 根据矩形的面积列出一元二次方程，解方程求解即可；

（2）设围成花圃面积为 S, AB 的长为 x, 根据二次函数的性质求最值即可

【详解】（1）解：设 AB 的长为 x,

∴x（24-2x）=54

解得：$x_1=3$，$x_2=9$

又∵$24-2x\le12$,解得：$x\ge6$

∴$x=9$

答：AB 的长为 9m

（2）解：设围成花圃面积为 S，AB 的长为 x,

∴$S=x(24-2x)=-2(x-6)^2+72$

由（1）可知 $x\ge6$

∴当 $x=6$ 时，$S_{最大}=72m^2>54m^2$

$24-2x=12m$

答：能围成面积比 54m²更大的花圃，花圃的最大面积为 72m²，此时 AB 长为 6m，CD 长为 12m

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，二次函数的应用，根据题意列出方程以及掌握二次函数的性质

是解题的关键.

24.【答案】(1) AD，AE；(2) 画图象见解析；(3) 2.2，3.3.

【分析】(1) 根据函数的定义可得答案；

(2) 根据题意作图即可；

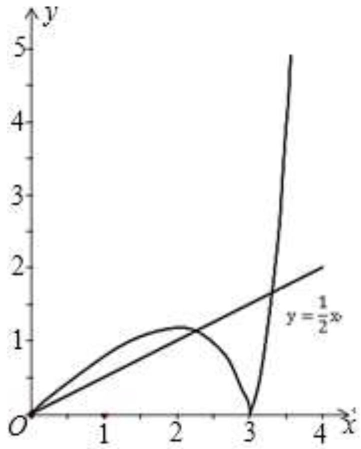
(3) 满足 AE=$\frac{1}{2}$AD 条件，实际上可以转化为正比例函数 y=$\frac{1}{2}$x.

【详解】解：(1) 根据题意，D 为 AB 边上的动点，

∴AD 的长度是自变量，AE 的长度是这个自变量的函数；

∴故答案为：AD，AE.

(2) 根据已知数据，作图得：



(3) 当 AE=$\frac{1}{2}$AD 时，y=$\frac{1}{2}$x，在 (2) 中图象作图，并测量两个函数图象交点得：AD=2.2 或 3.3

故答案为：2.2 或 3.3

【点睛】本题是圆的综合题，以几何动点问题为背景，考查了函数思想和数形结合思想．在 (3) 中将线段的数量转化为函数问题，设计到了转化的数学思想.

25.【答案】(1) 证明见解析；

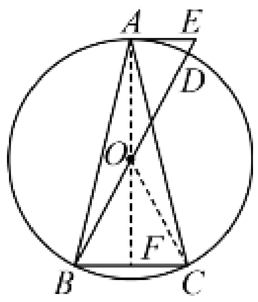
(2) CD 的长为 $\frac{120\pi\times 2}{180}=\frac{4\pi}{3}$，$AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【分析】(1) 连接并延长 AO 交 BC 于点 F，连接 OC，则 $OA=OB=OC$，$\angle OAB=\angle OBA=\frac{180^{\circ}-\angle AOB}{2}$，$\angle OAC=\angle OCA=\frac{180^{\circ}-\angle AOC}{2}$，由 $AB=AC$ 得 $\angle OAB=\angle OAC$，所以 $AF\perp BC$，由 $AE\parallel BC$，得 $\angle OAE=\angle AFB=90^{\circ}$，即可证明；

(2) 由 $\angle ACB=\angle ABC=75^{\circ}$ 得 $\angle BAC=30^{\circ}$，$\angle BOC=60^{\circ}$，则有 $\triangle BOC$ 是等边三角形，$\angle COD=120^{\circ}$，根据弧长公式计算即可，最后根据含 30° 角的直角三角形即可求出 AE 长.

【小问 1 详解】

证明：连接并延长 AO 交 BC 于点 F，连接 OC，则 $OA=OB=OC$，



$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\dfrac{180^{\circ}-\angle AOB}{2}$， $\angle OAC=\angle OCA=\dfrac{180^{\circ}-\angle AOC}{2}$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ACB=\angle ABC$，

$\because \angle AOB=2\angle ACB$， $\angle AOC=2\angle ABC$，

$\therefore \angle AOB=\angle AOC$，

$\therefore \dfrac{180^{\circ}-\angle AOB}{2}=\dfrac{180^{\circ}-\angle AOC}{2}$，

$\therefore \angle OAB=\angle OAC$，

$\therefore AF\perp BC$，

$\because AE\parallel BC$，

$\therefore \angle OAE=\angle AFB=90^{\circ}$，

$\therefore OA$ 是$\odot O$ 的半径，且 $AE\perp OA$，

$\therefore AE$ 是$\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

$\because \angle ACB=\angle ABC=75^{\circ}$，

$\therefore \angle BAC=180^{\circ}-\angle ACB-\angle ABC=30^{\circ}$，

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=2\times 30^{\circ}=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle BOC$ 是等边三角形， $\angle COD=180^{\circ}-\angle BOC=120^{\circ}$，

$\therefore OC=OA=BC=2$，

$\therefore CD$ 的长为$\dfrac{120\pi\times 2}{180}=\dfrac{4\pi}{3}$，

$\because AE$ 是$\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OAE=90^{\circ}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAE$ 中， $\angle AOE==\angle BOF=\dfrac{1}{2}\angle BOC=30^{\circ}$，

$\therefore OE=2AE$，

由勾股定理得： $AE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】此题重点考查等腰三角形的性质、圆周角定理、平行线的性质、切线的判定定理、等边三角形的判定与性质、三角形内角和定理、弧长公式，含30°角的直角三角形等知识，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

26.【答案】（1）抛物线对称轴为直线$x=2$，顶点坐标为$\left(2,4\right)$；

（2）① $m=1$；② $0<m<9$.

【分析】（1）把$y=-x^2+4x$化成顶点式即可求解；

（2）① 由二次函数图象的可知：当$t=2$，若图象G为轴对称图形时，M与N关于对称轴直线$x=2$对称，根据图象即可求值；

② 分类讨论若$0<t<1$，当$x=1$时有最低点，纵坐标为3，当$x=x_1+t$时有最低点，纵坐标小于4，则最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$0<m<1$；若$1\le t<3$，当$x=2$时有最高点，纵坐标为4，当$x=1$时有最低点，纵坐标为3，则最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$0<m\le 1$；若$3\le t<4$，当$x=2$时有最高点，纵坐标为4，当$x=5$时有最低点，纵坐标为-5，则最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$1<m<9$；

此题考查了二次函数的综合知识，二次函数的图象和性质，掌握二次函数图象上点的坐标特征，运用分类思想进行讨论解决问题是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：由$y=-x^2+4x=-\left(x-2\right)^2+4$，

∴抛物线对称轴为直线$x=2$，顶点坐标为$\left(2,4\right)$；

【小问 2 详解】

① 当$t=2$，若图象G为轴对称图形，

∴$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_1+2,y_2\right)$关于对称轴直线$x=2$对称，

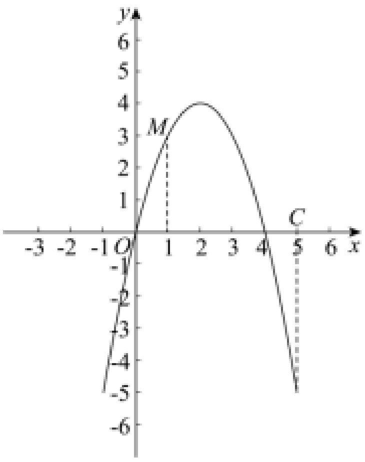
∴$y_1=y_2$，$x_1=1$，

∴当$x=2$时有最高点，纵坐标为4，

当$x=1$时有最低点，纵坐标为3，

∴$m=4-3=1$，

② 根据图象可知：



若$0<t<1$，当$x=1$时有最低点，纵坐标为3，当$x=x_1+t$时有最高点，纵坐标小于4，则最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$0<m<1$；

若$1\le t<3$，当$x=2$时有最高点，纵坐标为4，当$x=1$时有最低点，纵坐标为3，

则最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$0<m\le 1$；

若$3\le t<4$，当$x=2$时有最高点，纵坐标为4，当$x=5$时有最低点，纵坐标为-5，

则最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$1<m<9$；

∴综上可知最高点与最低点的纵坐标之差m的范围为$0<m<9$.

27.【答案】(1）见解析　（2）证明见解析

（3）$AF+\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，证明见解析

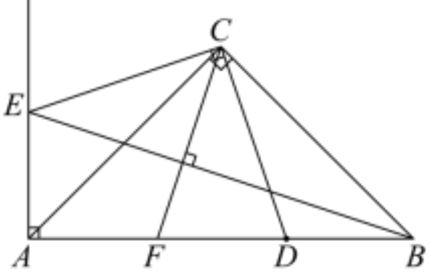
【分析】(1）依题意作图即可；

（2）根据等腰三角形的性质可得$\angle EAC=\angle DBC=45^\circ$，再根据同角的余角相等可得出$\angle ECA=\angle DCB$，即可利用ASA证明$\triangle ECA\cong\triangle DCB$，即可得出结论；

（3）取AB的中点为Q，连接CQ交BE于点H，过点C作AE的垂线交延长线于点K，先利用ASA证明$\triangle FQC\cong\triangle HQB$，得出$FQ=HQ$，再证明$HQ$是$\triangle EAB$的中位线，可得出$HQ=\frac{1}{2}AE$，然后证明四边形$AKCQ$为正方形，则有$AC=\sqrt{2}AQ$，进而可得出结论.

【小问1详解】

解：依题意补全图形如下：



【小问2详解】

证明：∵$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \angle FAC = \angle DBC = 45°$

又$\because EA \perp AB$，

$\therefore \angle EAF = 90°$，

$\therefore \angle EAC = \angle EAF - \angle FAC = 90° - 45° = 45°$，

$\therefore \angle EAC = \angle DBC = 45°$，

$\because \angle ECD = \angle ECA + \angle ACD = 90°$，$\angle ACB = \angle DCB + \angle ACD = 90°$，

$\therefore \angle ECA = \angle DCB$，

在$\triangle ECA$和$\triangle DCB$中，

$$\begin{cases} \angle ECA = \angle DCB \\ AC = BC \\ \angle EAC = \angle DBC = 45° \end{cases},$$

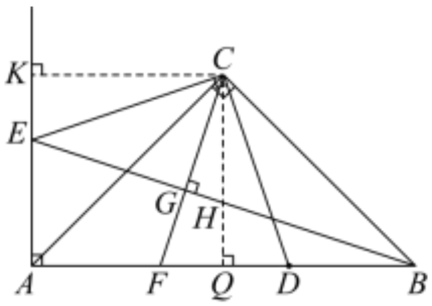
$\therefore \triangle ECA \cong \triangle DCB(\text{ASA})$，

$\therefore CE = CD$；

【小问 3 详解】

解：线段 AE，AC，AF 间的关系为：$AF + \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$，证明过程如下：

取 AB 的中点为 Q，连接CQ交 BE 于点 H，过点 C 作 AE 的垂线交延长线于点 K，如图所示：



$\because CF \perp BE$ 交 AB 于点 F，

即$\angle CGH = 90°$，

又$\because \angle HQB = 90°$，$\angle BHQ = \angle CHG$

$\therefore \angle GCH = \angle QBH$，

在$\triangle FQC$和$\triangle HQB$，

$$\begin{cases} \angle FQC = \angle HQB = 90° \\ CQ = BQ \\ \angle GCH = \angle QBH \end{cases},$$

$\therefore \triangle FQC \cong \triangle HQB(\text{ASA})$，

$\therefore FQ = HQ$，

$\because \angle EAB = \angle HQB = 90°$，

$\therefore EA \parallel HQ$，

又$\because AQ = BQ$，

$\therefore HQ$是$\triangle EAB$的中位线，

$\therefore HQ = \dfrac{1}{2}AE$，

$\therefore FQ = \dfrac{1}{2}AE$，

$\because \triangle ABC$中，$AC = BC$，$\angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ABC$为等腰直角三角形，

$\because Q$为AB的中点，

$\therefore CQ$垂直平方AB，

则$AQ = BQ = CQ$，$\angle AQC = 90^\circ$，

又$\because \angle EAF = 90^\circ$，$\angle AKC = 90^\circ$，

$\therefore$四边形$AKCQ$为正方形，

$\therefore AC = \sqrt{2}AQ$，

$\therefore AC = \sqrt{2}(AF + FQ) = \sqrt{2}(AF + \dfrac{1}{2}AE)$，

即$AF + \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$．

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，正方形的判定与性质，三角形的中位线，同角的余角相等，等腰直角三角形的性质，解题的关键是能正确作出辅助线以及能熟练掌握三角形的判定方法．

28.【答案】（1）①4，3；②$0 \le d_1 \le 5$；③$\sqrt{34} - \sqrt{5} \le d_2 \le \sqrt{34} + \sqrt{5}$；

（2）$0 \le d_1 \le 3\sqrt{3} + 1$．

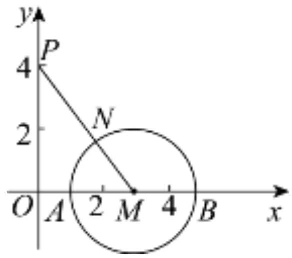
【分析】（1）利用点到直线距离和两点之间距离即可求解；

（2）根据圆心$C\left(m, \sqrt{3}m\right)$，则点$C$在$y = \sqrt{3}x$直线上，再由勾股定理及圆上动点即可求解；

此题考查了点和圆的关系，直线和圆的位置关系，解题的关键是理解题意，学会利用特殊位置解决问题．

【小问1详解】

①如图，根据点到直线的距离可知，点P到线段AB的距离为$OP = 4$，



$\because A(1,0)$， $B(5,0)$，

$\therefore AB=4$，

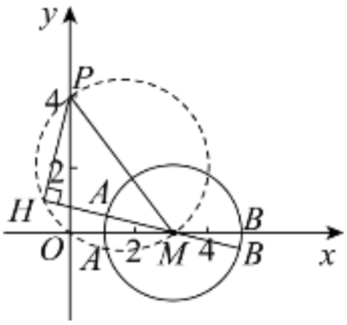
$\therefore \odot M$ 的半径为2，

在$\mathrm{Rt}\triangle POM$ 中，由勾股定理得： $PM=\sqrt{OP^2+AM^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$\therefore$点 P 到以线段 AB 为直径的圆的距离为$5-2=3$，

故答案为： 4， 3；

② 如图，由（1）得 $PM=5$，



$\because PH\perp BM$，

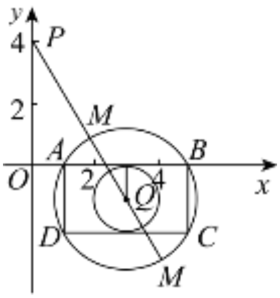
$\therefore \angle PHM=90°$，

$\therefore$点 H 在以 PM 为直径的圆上运动，

$\therefore$点 P 到线段 AB 距离 d_1 的取值范围为$0\le d_1\le 5$，

故答案为： $0\le d_1\le 5$；

③ 如图，同② 理，可得：圆心$Q(3,-1)$，



$\therefore PQ=\sqrt{(0-3)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{34}$，圆半径为$\sqrt{(1-3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore \sqrt{34}-\sqrt{5}\le d_2\le\sqrt{34}+\sqrt{5}$，

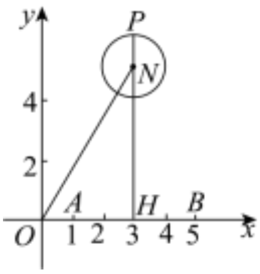
故答案为： $\sqrt{34}-\sqrt{5}\le d_2\le\sqrt{34}+\sqrt{5}$；

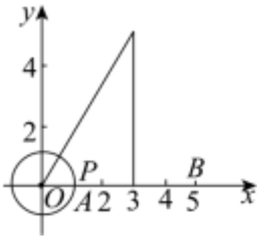
【小问 2 详解】

由圆心$C(m,\sqrt{3}m)$，

$\therefore$点C 在 $y=\sqrt{3}x$ 直线上，

如图，





同理$0\le d_1\le 3\sqrt{3}+1$.