



# 2024 北京房山高 一（上） 期末

## 数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

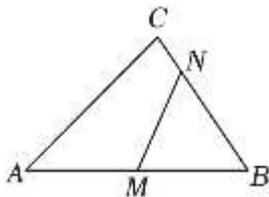
- 已知  $A(2, -3)$ ,  $B(-4, 1)$ , 则线段  $AB$  中点的坐标为 ( )  
 A.  $(-3, 2)$       B.  $(3, -2)$       C.  $(1, 1)$       D.  $(-1, -1)$
- 某产品按质量分为甲、乙、丙三个级别，从这批产品中随机抽取一件进行检测，设“抽到甲级品”的概率为 0.80，“抽到乙级品”的概率为 0.15，则“抽到丙级品”的概率为 ( )  
 A. 0.05      B. 0.25      C. 0.8      D. 0.95
- 下列四个函数中，在  $(0, +\infty)$  上单调递减的是 ( )  
 A.  $y=\sqrt{x}$       B.  $y=-x^2+x$       C.  $y=2^x$       D.  $y=-\log_2 x$
- 设  $a=\log_2 0.3$ ,  $b=0.3^2$ ,  $c=2^{0.3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )  
 A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $b < a < c$       D.  $b < c < a$
- 甲、乙两名射击运动员在某次测试中各射击 10 次，两人的测试成绩如下表：

甲的成绩					
环数	6	7	8	9	10
频数	1	2	4	2	1

乙的成绩					
环数	6	7	8	9	10
频数	3	2	1	1	3

甲、乙两人成绩的平均数分别记作  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , 标准差分别记作  $s_1, s_2$ . 则 ( )

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| A. $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, s_1 > s_2$ | B. $\bar{x}_1 < \bar{x}_2, s_1 < s_2$ |
| C. $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, s_1 < s_2$ | D. $\bar{x}_1 < \bar{x}_2, s_1 > s_2$ |
- 如图，在  $\triangle ABC$  中，点  $M, N$  满足  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$ , 则  $\overrightarrow{MN} =$  ( )



- |   |   |
|---|---|
| A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$  | B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$  |
| C. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ | D. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ |

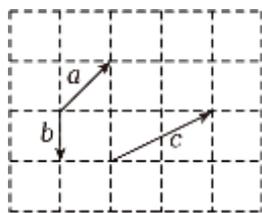


7. 在信息论中, 设某随机事件发生的概率为  $P$ , 称  $\log_2 \frac{1}{P}$  为该随机事件的自信息. 若按先后顺序抛掷两枚均匀的硬币, 则事件“恰好出现一次正面”的自信息为 ( )
- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3
8. 对于向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , “ $|\vec{a}|=|\vec{a}+\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{b}|=0$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要
9. 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数. 人体的血氧饱和度正常范围是 95%~100%, 当血氧饱和度低于 90%时, 需要吸氧治疗, 在环境模拟实验室的某段时间内, 可以用指数模型:  $S(t) = S_0 e^{Kt}$  描述血氧饱和度  $S(t)$  随给氧时间  $t$  (单位: 时) 的变化规律, 其中  $S_0$  为初始血氧饱和度,  $K$  为参数. 已知  $S_0 = 60\%$ , 给氧 1 小时后, 血氧饱和度为 80%. 若使得血氧饱和度达到 90%, 则至少还需要给氧时间 (单位: 时) 为 ( )
- (精确到 0.1, 参考数据:  $\ln 2 \approx 0.69$ ,  $\ln 3 \approx 1.10$ )
- A. 0.3                      B. 0.5                      C. 0.7                      D. 0.9
10. 已知函数  $f_1(x) = 2^x$ ,  $f_2(x) = 2x+1$ ,  $g_1(x) = \log_a x$  ( $a > 1$ ),  $g_2(x) = kx$  ( $k > 0$ ), 则下列结论正确的是 ( )
- A. 函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的图象有且只有一个公共点  
B.  $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ , 当  $x > x_0$  时, 恒有  $g_1(x) > g_2(x)$   
C. 当  $a=2$  时,  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ ,  $f_1(x_0) < g_1(x_0)$   
D. 当  $a = \frac{1}{k}$  时, 方程  $g_1(x) = g_2(x)$  有解

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11.  $\frac{2}{8^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\lg 4 + 2\lg 5 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  在正方形网格中的位置如图所示, 若  $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ), 则  $\lambda + \mu = \underline{\hspace{2cm}}$ .



13. 为估计某森林内松鼠的数量, 使用以下方法: 先随机从森林中捕捉松鼠 100 只, 在每只松鼠的尾巴上作上记号后放回森林. 再随机从森林中捕捉 50 只, 若尾巴上有记号的松鼠共有 5 只, 估计此森林内约有松鼠            只.
14. 已知向量  $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$ ,  $\vec{b} = (x, y)$ , 若  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  共线, 且  $|\vec{b}| = 1$ , 则向量  $\vec{b}$  的坐标可以是                     . (写出一个即可)



15. 函数  $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-1, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 若  $a=4$ , 则  $f(f(-2)) =$  \_\_\_\_\_;

若函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 有一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , 其中  $x_1$  是最小值,  $x_6$  是最大值, 下面有四个结论:

- ①  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的中位数等于  $x_1, x_2, \dots, x_6$  的中位数;
- ②  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的平均数等于  $x_1, x_2, \dots, x_6$  的平均数;
- ③  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的标准差不大于  $x_1, x_2, \dots, x_6$  的标准差;
- ④  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的极差不大于  $x_1, x_2, \dots, x_6$  的极差.

则所有正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

**三、解答题共 5 题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。**

17. (15 分) 设向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  不共线.

(I) 若  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1)$ , 且  $2\vec{a} - k\vec{b}$  与  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  平行, 求实数  $k$  的值;

(II) 若  $\vec{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{BC} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{CD} = -8\vec{a} - 2\vec{b}$ , 求证:  $A, C, D$  三点共线.

18. (15 分) 一个问题, 甲正确解答的概率为 0.8, 乙正确解答的概率为 0.7. 记事件  $A$ : 甲正确解答, 事件  $B$ : 乙正确解答. 假设事件  $A$  与  $B$  相互独立.

(I) 求恰有一人正确解答问题的概率;

(II) 某同学解“求该问题被正确解答的概率”的过程如下:

解: “该问题被正确解答”也就是“甲、乙二人中至少有一人正确解答了问题”, 所以随机事件“问题被正确解答”可以表示为  $A+B$ . 所以  $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.8 + 0.7 = 1.5$ .

请你指出这位同学错误的原因, 并给出正确解答过程.

19. (15 分) 已知函数  $f(x) = \log_3(2+x) + \log_3(2-x)$ .

(I) 求  $f(x)$  的定义域;

(II) 判断  $f(x)$  的奇偶性, 并证明;

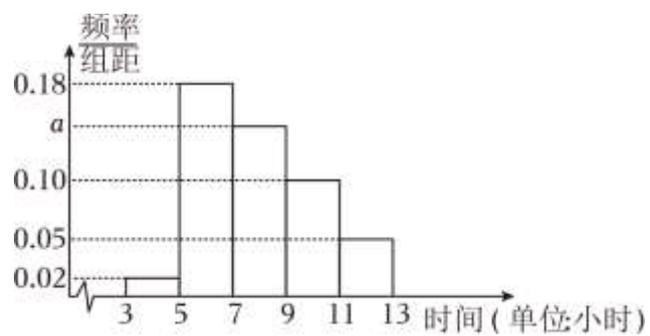
(III) 解关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq 1$ .

20. (13 分) 某校为了调查学生的体育锻炼情况, 从全校学生中随机抽取 100 名学生, 将他们的周平均锻炼时间 (单位: 小时) 数据按照  $[3, 5)$ ,  $[5, 7)$ ,  $[7, 9)$ ,  $[9, 11)$ ,  $[11, 13]$  分成 5 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.

(I) 求  $a$  的值;

(II) 用分层抽样的方法从  $[9, 11)$  和  $[11, 13]$  两组中抽取了 6 人. 求从这 6 人中随机选出 2 人, 这 2 人不在同一组的概率;

(III) 假设同组中的每个数据用该区间的中点值代替, 试估计全校学生周平均锻炼时间的平均数.



21. (12分) 若 $\exists M > 0$ , 对 $\forall x \in D$ , 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上具有性质 $J(M)$ .

(I) 分别判断函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x} + 1$ 与 $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是否具有性质 $J(M)$ , 如果具有性质 $J(M)$ , 写出 $M$ 的取值范围;

(II) 若函数 $h(x) = a \cdot 2^{x+1} - 4^x$ 在 $[0, 1]$ 上具有性质 $J(1)$ , 求实数 $a$ 的取值范围.



## 参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】直接将  $A$ 、 $B$  两点坐标代入线段中点坐标计算公式求解即可。

【解答】 $D$  解：∵  $A(2, -3)$ ， $B(-4, 1)$ ，

∴ 线段  $AB$  中点的坐标为  $(\frac{-4+2}{2}, \frac{-3+1}{2}) = (-1, -1)$ ，

故选： $D$ 。

【点评】本题主要考查线段中点坐标的计算，解题关键在于找准线段两个端点的坐标，为基础题。

2. 【分析】利用互斥事件概率加法公式能求出“抽到丙级品”的概率。

【解答】解：某产品按质量分为甲、乙、丙三个级别，从这批产品中随机抽取一件进行检测，设“抽到甲级品”的概率为 0.80，“抽到乙级品”的概率为 0.15，则“抽到丙级品”的概率为  $P=1-0.8-0.15=0.05$ 。

故选： $A$ 。

【点评】本题考查互斥事件概率加法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

3. 【分析】由已知结合基本初等函数的单调性检验各选项即可判断。

【解答】解：根据幂函数的性质可知， $y=\sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，不符合题意；  
根据二次函数的性质可知， $y=-x^2+x$  在  $(0, +\infty)$  上不单调，不符合题意；  
根据指数函数的性质可知， $y=2^x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，不符合题意；  
根据对数函数的性质可知， $y=-\log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，符合题意。

故选： $D$ 。

【点评】本题主要考查了基本初等函数单调性的判断，属于基础题。

4. 【分析】利用指数函数和对数函数的单调性求解。

【解答】解：∵  $\log_2 0.3 < \log_2 1 = 0$ ，∴  $a < 0$ ，

∵  $0 < 0.3^2 < 0.3^0 = 1$ ，∴  $0 < b < 1$ ，

∵  $2^{0.3} > 2^0 = 1$ ，∴  $c > 1$ ，

∴  $a < b < c$ 。

故选： $A$ 。

【点评】本题主要考查了指数函数和对数函数的性质，属于基础题。

5. 【分析】根据题意，计算甲乙两人成绩的平均数和标准差，比较可得答案。

【解答】解：根据题意，甲成绩的平均数  $\bar{x}_1 = \frac{1}{10}(6 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 4 + 9 \times 2 + 10 \times 1) = 8$ ，

其方差  $s_1^2 = \frac{1}{10}[(6-8)^2 \times 1 + (7-8)^2 \times 2 + (8-8)^2 \times 4 + (9-8)^2 \times 2 + (10-8)^2 \times 1] = 1.2$ ，

则其标准差  $s_1 = \sqrt{1.2}$ ；

甲成绩的平均数  $\bar{x}_2 = \frac{1}{10}(6 \times 3 + 7 \times 2 + 8 \times 1 + 9 \times 1 + 10 \times 3) = 7.9$ ，



其方差  $s_2^2 = \frac{1}{10}[(6-7.9)^2 \times 1 + (7-7.9)^2 \times 2 + (8-7.9)^2 \times 4 + (9-7.9)^2 \times 2 + (10-7.9)^2 \times 1]$   
 $= 26.9,$

则其标准差  $s_2 = \sqrt{26.9}$ ;

故  $\overline{x_1} > \overline{x_2}$ ,  $s_1 < s_2$ .

故选: C.

【点评】本题考查数据的平均数、标准差的计算, 注意平均数、标准差的计算公式, 属于基础题.

6. 【分析】由平面向量的线性运算计算即可.

【解答】解: 因为  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$ ,

所以  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ .

故选: C.

【点评】本题考查平面向量的线性运算, 属于基础题.

7. 【分析】利用相互独立事件概率乘法公式、对数性质直接求解.

【解答】解: 在信息论中, 设某随机事件发生的概率为  $P$ , 称  $\log_2 \frac{1}{P}$  为该随机事件的自信息.

按先后顺序抛掷两枚均匀的硬币,

事件“恰好出现一次正面”的概率  $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ,

则事件“恰好出现一次正面”的自信息为  $\log_2 \frac{1}{P} = \log_2 2 = 1$ .

故选: B.

【点评】本题考查相互独立事件概率乘法公式、对数性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

8. 【分析】求出  $|\vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$  的充要条件, 再根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】解: 若  $|\vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ , 则  $\vec{a}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ,

$\therefore 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{b}^2 = 0$ ,  $\therefore 2|\vec{a}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}| = 0$  或  $|\vec{b}| = 0$ ,

$\therefore |\vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$  是  $|\vec{b}| = 0$  的必要不充分条件,

故选: B.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 利用向量数量积的运算和性质是解决本题的关键, 属于基础题.

9. 【分析】依据题给条件列出关于时间  $t$  的方程, 解之即可求得给氧时间至少还需要的小时数.

【解答】解: 设使得血氧饱和度达到正常值, 给氧时间至少还需要  $t-1$  小时,

由题意可得  $60e^K = 80$ ,  $60e^{Kt} = 90$ , 两边同时取自然对数并整理,

得  $K = \ln \frac{80}{60} = \ln \frac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3 = 2\ln 2 - \ln 3$ ,  $Kt = \ln \frac{90}{60} = \ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$ ,



则  $t = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2 \ln 2 - \ln 3} \approx \frac{1.10 - 0.69}{2 \times 0.69 - 1.10} \approx 1.5$ , 则给氧时间至少还需要 0.5 小时.

故选: B.

【点评】本题主要考查函数在实际问题中的应用, 考查运算求解能力, 属于基础题.

10. 【分析】根据函数的单调性, 以及函数零点的存在性定理进行逐一判定即可.

【解答】解: 选项 A:  $\because f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 2x+1$ ,

$\therefore f_1(0) = 1, f_2(0) = 1, f_1(2) = 4 < f_2(2) = 5, f_1(3) = 8 > f_2(3) = 7$ ,

则函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的图象有一个交点  $(0, 1)$ , 还有一个交点横坐标在  $(2, 3)$  上, 故选项 A 不正确;

选项 B: 当  $a=2, k=1$  时,  $g_1(x) = \log_2 x < g_2(x) = x$  恒成立,

故不  $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ , 当  $x > x_0$  时, 恒有  $g_1(x) > g_2(x)$ , 故选项 B 不正确;

选项 C: 当  $a=2$  时,  $f_1(x)$  与  $g_1(x)$  的图象关于  $y=x$  对称,  $f_1(x)$  的图象恒在直线  $y=x$  上方,

$g_1(x)$  的图象恒在直线  $y=x$  下方, 故不存在  $x_0 \in (0, +\infty)$ ,  $f_1(x_0) < g_1(x_0)$ , 故选项 C 不正确;

选项 D:  $a = \frac{1}{k}$  时,  $g_2(x) = \frac{1}{a}x$ ,

故  $g_1(x) = \log_a x (a > 1)$  和  $g_2(x) = kx (k > 0)$  均过点  $(a, 1)$ ,

所以方程  $g_1(x) = g_2(x)$  有解, 故选项 D 正确.

故选: D.

【点评】本题主要考查了命题真假的判断的应用, 以及函数零点的存在性定理, 同时考查了学生分析问题的能力.

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 【分析】由已知结合指数幂及对数的运算性质即可求解.

【解答】解:  $8^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ ,

$\lg 4 + \lg 25 = \lg 100 = 2$ .

故答案为: 4; 2.

【点评】本题主要考查了指数幂及对数的运算性质, 属于基础题.

12. 【分析】建立平面直角坐标系, 由平面向量的坐标运算和平面向量基本定理建立方程组, 求解即可.

【解答】解: 如图建立平面直角坐标系,

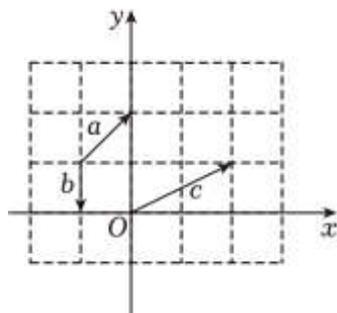
则  $\vec{b} = (0, -1), \vec{a} = (1, 1), \vec{c} = (2, 1)$ ,

因为  $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ ,

所以  $\begin{cases} 2 = \lambda \\ 1 = \lambda - \mu \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ ,

所以  $\lambda + \mu = 1 + 2 = 3$ .

故答案为: 3.



【点评】本题考查平面向量的坐标运算，平面向量基本定理，属于基础题

13. 【分析】设此森林内约有松鼠  $n$  只，则  $\frac{100}{n} = \frac{5}{50}$ ，求出  $n$  的值即可.

【解答】解：设此森林内约有松鼠  $n$  只，则  $\frac{100}{n} = \frac{5}{50}$ ，

解得  $n=1000$ .

故答案为：1000.

【点评】本题主要考查了用样本估计总体，属于基础题.

14. 【分析】利用向量平行的坐标表示和模的坐标表示建立方程组，求解即可.

【解答】解：因为  $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$ ， $\vec{b} = (x, y)$ ，且  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  共线， $|\vec{b}|=1$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} \sqrt{3}y - x = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

故答案为： $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  (或  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ).

【点评】本题考查平面向量的坐标运算，属于基础题.

15. 【分析】直接代入求解即可；根据分段函数单调递增需要满足的条件，列出对应的不等式组即可求解结论.

【解答】解：∵ 函数  $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-1, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，

若  $a=4$ ，则  $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 1 \\ \log_4 x, & x \geq 1 \end{cases}$ ，

故  $f(-2) = -(-2) - 1 = 1$ ， $f(f(-2)) = f(1) = \log_4 1 = 0$ ；

函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数，

$$\therefore \begin{cases} 3-a > 0 \\ a > 1 \\ 3-a-1 \leq \log_a 1 \end{cases}, \text{ 解得 } 2 \leq a < 3, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围是 } [2, 3).$$

故答案为：0；[2, 3).

【点评】本题主要考查分段函数的应用，考查计算能力，属于中档题.

16. 【分析】根据中位数，平均数，标准差，极差的定义判断即可.



【解答】解：取  $x_1=1$ ,  $x_2=x_3=x_4=x_5=2$ ,  $x_6=9$ , 则  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的平均数等于 2, 标准差为 0,

$x_1, x_2, \dots, x_6$  的平均数等于 3, 标准差为  $\sqrt{\frac{22}{3}} = \frac{\sqrt{66}}{3}$ , 故②不正确,

若  $x_1, x_6$ , 偏离平均数较大, 去掉它们后, 标准差可能减小,

若  $x_1, x_6$ , 偏离平均数较小, 去掉它们后, 标准差可能减小或不变, ③正确;

根据中位数的定义, 将  $x_1, x_2, \dots, x_6$  按从小到大的顺序进行排列,

中位数是中间两个数的算术平均数, 由于  $x_1$  是最小值,  $x_6$  是最大值,

故  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的中位数是将  $x_2, x_3, x_4, x_5$  按从小到大的顺序排列后中间两个数的算术平均数,

与  $x_1, x_2, \dots, x_6$  的中位数相等, 故①正确;

根据极差的定义, 知  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的极差不大于  $x_1, x_2, \dots, x_6$  的极差, 故④正确.

故答案为: ①③④.

【点评】本题考查特征数的比较, 属于中档题.

### 三、解答题共 5 题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 【分析】(I) 根据向量平行的坐标运算求解;

(II) 根据向量共线的定义证明即可.

【解答】(I) 解: 由题意,  $2\vec{a} - k\vec{b} = (2+k, 4-k)$ ,  $3\vec{a} - 3\vec{b} = (5, 4)$ ,

$\because 2\vec{a} - k\vec{b}$  与  $3\vec{a} - 3\vec{b}$  平行,  $\therefore 4 \times (2+k) = 5 \times (4-k)$ , 解得  $k = \frac{4}{3}$ ;

(II) 证明:  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 4\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{CD} = -8\vec{a} - 2\vec{b}$ ,

$\because \vec{AC} = -2\vec{CD}$ ,  $\therefore A, C, D$  三点共线.

【点评】本题考查平面向量的运算, 属于基础题.

18. 【分析】(I) 事件  $A$ : 甲正确解答, 事件  $B$ : 乙正确解答. 假设事件  $A$  与  $B$  相互独立. 事件“恰有一人正确解答”可表示为  $\overline{A}B + A\overline{B}$ , 由  $\overline{A}B, A\overline{B}$  互斥,  $A$  与  $B$  相互独立, 能求出恰有一人正确解答问题的概率.

(II) 该同学错误在于事件  $A, B$  不互斥, 而用了互斥事件的概率加法公式. “问题被解答”也就是“甲、乙二人中至少有一人正确解答了问题”, 可以表示为  $\overline{A}B + A\overline{B} + AB$ , 且  $\overline{A}B, A\overline{B}, AB$  两两互斥,  $A$  与  $B$  相互独立, 由此能求出结果.

【解答】解: (I) 一个问题, 甲正确解答的概率为 0.8, 乙正确解答的概率为 0.7,

记事件  $A$ : 甲正确解答, 事件  $B$ : 乙正确解答. 假设事件  $A$  与  $B$  相互独立.

事件“恰有一人正确解答”可表示为  $\overline{A}B + A\overline{B}$ , 由  $\overline{A}B, A\overline{B}$  互斥,  $A$  与  $B$  相互独立,

所以  $P(\overline{A}B + A\overline{B}) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B})$

$= P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B})$

$= 0.2 \times 0.7 + 0.8 \times 0.3$

$= 0.38$ .

(II) 该同学错误在于事件  $A, B$  不互斥, 而用了互斥事件的概率加法公式.



正确的解答过程如下：

“问题被解答”也就是“甲、乙二人中至少有一人正确解答了问题”，  
可以表示为 $\overline{A}B + A\overline{B} + AB$ ，且 $\overline{A}B$ ， $A\overline{B}$ ， $AB$ 两两互斥， $A$ 与 $B$ 相互独立，

$$\text{所以 } P(\overline{A}B + A\overline{B} + AB) = P(P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) + P(AB))$$

$$= P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B}) + P(A)P(B)$$

$$= 0.2 \times 0.7 + 0.8 \times 0.3 + 0.8 \times 0.7$$

$$= 0.94.$$

$$\text{或者 } P(A+B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$= 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7)$$

$$= 0.94.$$

【点评】本题考查相互独立事件概率乘法公式、互斥事件概率加法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

19. 【分析】(I) 结合对数函数的性质即可求解；

(II) 结合函数奇偶性定义即可判断；

(III) 结合对数函数的运算性质及单调性即可求解。

【解答】解：(1) 由  $\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ ，解得  $-2 < x < 2$ ，

所以函数  $f(x)$  的定义域为  $(-2, 2)$ 。

(II) 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-2, 2)$ ，关于原点对称。

因为  $f(x) = \log(2+x) + \log(2-x)$ ，

所以  $f(-x) = \log_3(2-x) + \log_3(2+x) = f(x)$ 。

所以函数  $f(x)$  是定义在  $(-2, 2)$  上的偶函数。

(III) 由  $f(x) = \log_3(2+x) + \log_3(2-x) = \log_3(4-x^2)$ ，

得  $\log_3(4-x^2) \geq 1$ ，即  $\log_3(4-x^2) \geq \log_3 3$ ，

所以  $4-x^2 \geq 3$ ，

解得  $-1 \leq x \leq 1$ ，因为函数  $f(x)$  的定义域为  $(-2, 2)$ 。

因此不等式  $f(x) \geq 1$  的解集为  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ 。

【点评】本题主要考查了函数定义域的求解，还考查了函数的奇偶性的判断及单调性和奇偶性在不等式求解中的应用，属于中档题。

20. 【分析】(I) 利用频率分布直方图中各个小矩形的面积之和为 1 求解；

(II) 利用古典概型的概率公式求解；

(III) 利用平均数的定义求解。

【解答】解：(I) 因为频率分布直方图所有矩形的面积之和为 1，

所以  $(0.02+0.05+0.1+a+0.18) \times 2 = 1$ ，



解得  $a=0.15$ ;

(II) 由频率分布直方图可知 $[9, 11)$ 和 $[11, 13]$ 两组的频数的比为:  $0.1: 0.05=2: 1$ ,

所以利用分层抽样的方法抽取 6 人, 这两组被抽取的人数分别为 4, 2,

记 $[9, 11)$ 中的 4 人为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ,  $[11, 13]$ 中的 2 人为  $b_1, b_2$ ,

从这 6 人中随机选出 2 人,

则样本空间  $\Omega=\{a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4, a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_1, a_3b_2, a_4b_1, a_4b_2, b_1b_2\}$ , 共 15 个样本点,

设事件  $A$ : 选出的 2 人不在同一组,

则  $A=\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_1, a_3b_2, a_4b_1, a_4b_2\}$ , 共 8 个样本点,

所以  $P(A)=\frac{8}{15}$ ;

(III) 估计全校学生周平均锻炼时间的平均数为  $(4 \times 0.02+6 \times 0.18+8 \times 0.15+10 \times 0.1+12 \times 0.05) \times 2=7.92$  (小时).

【点评】本题主要考查了频率分布直方图的应用, 考查了古典概型的概率公式, 属于基础题.

21. 【分析】(I) 判断  $f(x)$  的单调性, 根据性质  $J(M)$  的定义判断即可;

(II) 根据函数  $h(x)=a \cdot 2^{x+1}-4^x$  在  $[0, 1]$  上具有性质  $J(1)$ , 得到对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有  $-1 \leq h(x) \leq 1$ , 再求出  $a$  的取值范围即可.

【解答】解: (I) 因为  $y=2^x$  在  $[2, +\infty)$  上是单调递增的函数,  $y=2^{-x}$  在  $[2, +\infty)$  上是单调递减的函数,

所以  $f(x)=2^x-2^{-x}+1$  在  $[2, +\infty)$  上是单调递增的函数, 所以  $f(x) \geq f(2)=\frac{19}{4} > 0$ .

任意  $M > 0$ , 当  $x > \log_2 \frac{M-1+\sqrt{(1-M)^2+4}}{2}$  时,  $|f(x)|=2^x-2^{-x}+1 > M$ ,

所以函数  $f(x)=2^x-2^{-x}+1$  在区间  $[2, +\infty)$  上不具有性质  $J(M)$ .

因为  $g(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$  在区间  $[2, +\infty)$  上单调递减,

所以  $g(x) \in (1, 3]$ , 所以  $\exists M=3$ , 对  $\forall x \in [2, +\infty)$ ,  $|g(x)| \leq 3$ ,

即函数  $g(x)$  在区间  $[2, +\infty)$  上具有性质  $J(M)$ .

$M$  的取值范围是  $[3, +\infty)$ .

(II) 因为函数  $h(x)=a \cdot 2^{x+1}-4^x$  在  $[0, 1]$  上具有性质  $J(1)$ ,

所以对  $\forall x \in [0, 1]$ , 都有  $-1 \leq h(x) \leq 1$ .

$h(x)=a \cdot 2^{x+1}-4^x=2a \cdot 2^x-(2^x)^2$ ,

令  $t=2^x$ , 则对  $\forall t \in [1, 2]$ , 都有  $-1 \leq 2at-t^2 \leq 1$ .

$\forall t \in [1, 2]$ , 都有  $\frac{t^2-1}{2t} \leq a \leq \frac{t^2+1}{2t}$ .



设  $m(t) = \frac{t^2-1}{2t}$ ,  $n(t) = \frac{t^2+1}{2t} \Leftrightarrow a \geq m(t)_{\max}$ ,  $a \leq n(t)_{\min}$ .

因为在区间  $[1, 2]$  上  $m(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$  单调递增,  $n(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$  单调递增.

所以  $m(t)_{\max} = m(2) = \frac{3}{4}$ ,  $n(t)_{\min} = n(1) = 1$ .

所以  $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ , 所以  $a$  的取值范围为  $[\frac{3}{4}, 1]$ .

**【点评】** 本题考查了函数的单调性, 利用不等式恒成立求参数的取值范围, 考查了转化思想和函数思想, 属中档题.