2024北京石景山高一（上）期末

数　　学

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，若 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|x<2\}$　　B．$\{x|0<x<2\}$　　C．$\{x|1<x<2\}$　　D．$\{x|-1<x<2\}$

2．已知命题 p：“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$”，则 $\neg p$ 为（　　）

A．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant 0$　　B．$\exists x\notin\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant 0$

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant 0$　　D．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$

3．下列函数中，在区间（0，+∞）上单调递增的是（　　）

A．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　B．$y=(x-1)^2$　　C．$y=-x+1$　　D．$y=x^3$

4．已知关于 x 的不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集是（-2，1）则 $a+b=$（　　）

A．0　　B．-1　　C．1　　D．-2

5．“$2^x<1$”是“$x<1$”的（　　）

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

6．某中学高三年级共有学生 800 人，为了解他们的视力状况，用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 40 的样本，若样本中共有女生 11 人，则该校高三年级共有男生（　　）人.

A．220　　B．225　　C．580　　D．585

7．若 $a<b<0$，则（　　）

A．$a^2<b^2$　　B．$ab<b^2$　　C．$2^a>2^b$　　D．$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-\log_2 x, & x\geqslant 1\\ 4^x, & x<1\end{cases}$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

9．已知函数 $f(x)=\log_2 x-x+1$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集是（　　）

A．（1，2）　　B．（-∞，1）∪（2，+∞）

C．（0，2）　　D．（0，1）∪（2，+∞）

10．已知非空集合 A，B 满足以下两个条件：

（ⅰ）$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\varnothing$；

（ⅱ）A 的元素个数不是 A 中的元素，B 的元素个数不是 B 中的元素，则有序集合对（A，B）的个数为（　　）

A．10　　　　B．12　　　　C．14　　　　D．16

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11．函数$y=\lg(x-2)+\frac{1}{x}$的定义域为_________．

12．已知$y=\frac{x^2+2x+4}{x}$$(x>0)$，则当$x=$______时，$y$取得最小值为______．

13．不等式$\frac{2x}{x-2}\leqslant 1$的解集为_________．

14．写出一个值域为$[1,+\infty)$的偶函数$f(x)=$_____________．

15．已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1, & x\leqslant 1,\\ ax, & x>1.\end{cases}$

（1）若$a=0$，则$f(x)$的最大值是______；

（2）若$f(x)$存在最大值，则a的取值范围为_________．

三、解答题共 5 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（6 分）已知集合$A=\{x|x^2-3x-4>0\}$，集合$B=\{x|a-x\leqslant 0\}$．

（Ⅰ）当$a=2$时，求$A\cup B$；

（Ⅱ）若$B\cap \complement_{R}A\neq\varnothing$，求实数$a$的取值范围．

17．（9 分）已知甲投篮命中的概率为 0.6，乙投篮不中的概率为 0.3，乙、丙两人都投篮命中的概率为 0.35，假设甲、乙、丙三人投篮命中与否是相互独立的．

（Ⅰ）求丙投篮命中的概率；

（Ⅱ）甲、乙、丙各投篮一次，求甲和乙命中，丙不中的概率；

（Ⅲ）甲、乙、丙各投篮一次，求恰有一人命中的概率．

18．（8 分）已知函数$f(x)=\frac{3x-m}{2x+2}$的图像过点（1，1）．

（1）求实数m的值；

（2）判断$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$上的单调性，并用定义证明．

19．（8 分）甲、乙两个篮球队在 4 次不同比赛中的得分情况如下表：

甲队	88	91	93	96
乙队	89	94	97	92

（Ⅰ）在 4 次比赛中，求甲队的平均得分；

（Ⅱ）分别从甲、乙两队的 4 次比赛得分中各随机选取 1 次，求这 2 个比赛得分之差的绝对值为 1 的概率；

（Ⅲ）甲，乙两队得分数据的方差分别记为S_1^2，S_2^2，试判断S_1^2与S_2^2的大小．（结论不要求证明）

20．（9 分）已知函数$f(x)=e^x+ae^{-x}$，其中 e 为自然对数的底数，$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）若 0 是函数$f(x)$的一个零点，求a的值并判断函数$f(x)$的奇偶性；

（Ⅱ）若函数$f(x)$同时满足以下两个条件，求a的取值范围．

条件①：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>0$；

条件②：$\exists x_0\in[-1, 1]$，使得 $f(x_0)\leqslant 4$．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】根据交集的定义直接写出 $A\cap B$ 即可.

【解答】解：$\because A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|0<x<2\}$，

故选：B.

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2.【分析】由特称命题的否定为全称命题，注意量词和不等号的变化.

【解答】解：由特称命题的否定为全称命题，可得

命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$，则$\neg p$ 是$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\geqslant 0$.

故选：C.

【点评】本题考查命题的否定，注意特称命题的否定为全称命题，考查转换能力，属于基础题.

3.【分析】由已知结合基本初等函数的单调性检验各选项即可判断.

【解答】解：$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在区间（0，$+\infty$）上单调递减，不符合题意；

$y=(x-1)^2$在区间（0，$+\infty$）上不单调，不符合题意；

$y=-x+1$ 在区间（0，$+\infty$）上单调递减，不符合题意；

$y=x^3$ 在区间（0，$+\infty$）上单调递增，符合题意.

故选：D.

【点评】本题主要考查了函数单调性的判断，属于基础题.

4.【分析】根据不等式的解集与相应方程的根的关系，利用韦达定理求解.

【解答】解：由题意 -2 和 1 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根，

所以 $-2+1=-a$，$a=1$，$-2\times1=b=-2$，

所以 $a+b=-1$.

故选：B.

【点评】本题考查一元二次不等式的解法及其运用，考查运算求解能力，属于基础题.

5.【分析】根据充分必要条件的定义，对两个条件进行正反推理论证，即可得到本题的答案.

【解答】解：当 $2^x<1$ 时，可得到 $x<0$，由 $x<0$ 可以推出 $x<1$，但由 $x<1$ 不能推出 $x<0$，

因此，“$x<0$”是“$x<1$”的充分不必要条件，即“$2^x<1$”是“$x<1$”的充分不必要条件.

故选：A.

【点评】本题主要考查指数不等式的解法、充要条件的判断等知识，考查了计算能力、逻辑推理能力，属于基础题

6.【分析】根据分层抽样的定义求解即可.

【解答】解：某中学高三年级共有学生 800 人，用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 40 的样本，

设该校高三年级共有男生 x 人，

∵样本中共有女生 11 人，∴样本中有男生 29 人，

∴$\frac{x}{800}=\frac{29}{40}$，解得 $x=580$．

则该校高三年级共有男生 580 人．

故选：C．

【点评】本题考查分层抽样等基础知识，考查运算求解能力，属于基础题．

7.【分析】根据不等式的性质与基本不等式，对各项中的不等式逐一判断，即可得到本题的答案．

【解答】解：对于 A，当 $a=-1$，$b=0$ 时，满足 $a<b$，但 $a^2<b^2$ 不成立，故 A 不正确；

对于 B，$a<b<0$，两边都乘以 b，得 $ab>b^2$，故 B 不正确；

对于 C，由函数 $y=2^x$ 为 R 上的增函数，可知 $2^a<2^b$，故 C 不正确；

对于 D，由于$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$都是正数，所以$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$，

根据 a、b 不相等，可知等号不能成立，故$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$成立，$D$ 项正确．

故选：D．

【点评】本题主要考查不等式的性质、基本不等式及其应用，考查了计算能力、逻辑推理能力，属于基础题．

8.【分析】根据分段函数的定义区间，结合函数解析式，求函数值．

【解答】解：函数 $f(x)=\begin{cases}2-\log_2 x, & x\geqslant 1\\ 4^x, & x<1\end{cases}$，则 $f(f(\frac{1}{2}))=f(4^{\frac{1}{2}})=f(2)=2-\log_2 2=1$．

故选：C．

【点评】本题主要考查对数的运算性质，属于基础题．

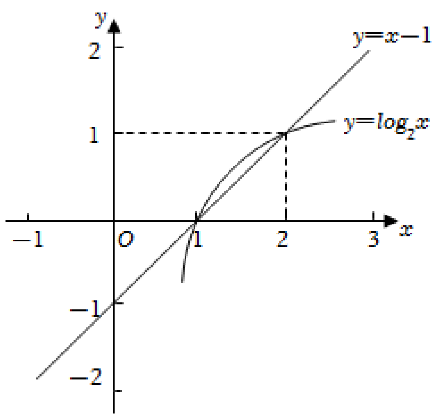
9.【分析】分别作出 $y=\log_2 x$ 的图象与 $y=x-1$ 的图象，观察图象即可得解．

【解答】解：依题意，$f(x)<0$ 等价于 $\log_2 x<x-1$，

分别作出 $y=\log_2 x$ 的图象与 $y=x-1$ 的图象，

如图可得不等式 $f(x)<0$ 的解集是（0，1）∪（2，+∞），

故选：D．



【点评】本题考查了不等式的解法，重点考查了数形结合的数学思想方法，属基础题．

10．【分析】分别讨论集合 A，B 元素个数，即可得到结论．

【解答】解：若集合 A 中只有 1 个元素，则集合 B 中只有 5 个元素，则 $1\notin A$，$5\notin B$，

即 $5\in A$，$1\in B$，此时有 $C_4^0=1$，

若集合 A 中只有 2 个元素，则集合 B 中只有 4 个元素，则 $2\notin A$，$4\notin B$，

即 $4\in A$，$2\in B$，此时有 $C_4^1=4$，

若集合 A 中只有 3 个元素，则集合 B 中只有 3 个元素，则 $3\notin A$，$3\notin B$，不满足题意，

若集合 A 中只有 4 个元素，则集合 B 中只有 2 个元素，则 $4\notin A$，$2\notin B$，

即 $2\in A$，$4\in B$，此时有 $C_4^3=4$，

若集合 A 中只有 5 个元素，则集合 B 中只有 1 个元素，则 $5\notin A$，$1\notin B$，

即 $1\in A$，$5\in B$，此时有 $C_4^4=1$，

故有序集合对（A，B）的个数是 $1+4+4+1=10$，

故选：A．

【点评】本题主要考查排列组合的应用，根据元素关系分别进行讨论是解决本题的关键．

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11．【分析】根据函数的解析式，列出使解析式有意义的不等式组，求出解集即可．

【解答】解：$y=\lg(x-2)+\frac{1}{x}$，

则$\begin{cases}x-2>0\\x\neq0\end{cases}$，解得 $x>2$，

故函数 y 的定义域为$\{x|x>2\}$．

故答案为：$\{x|x>2\}$．

【点评】本题考查了求函数定义域的问题，解题时应求出使函数有意义的自变量的取值范围，是基础题目．

12．【分析】将函数化简，可得$y=x+\frac{4}{x}+2$，结合 x 为正数，利用基本不等式算出答案．

【解答】解：根据题意，可得$y=x+\frac{4}{x}+2$，

因为 $x>0$，可得 $x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立，

所以当 $x=2$ 时，$y=x+\frac{4}{x}+2$取得最小值，且最小值为 6．

故答案为：2，6．

【点评】本题主要考查利用基本不等式求最值的知识，考查了计算能力、逻辑推理能力，属于基础题．

13．【分析】由题意，利用分式不等式、一元二次不等式的解法，求得 x 的范围．

【解答】解：由不等式$\frac{2x}{x-2}\leqslant1$，可得$\frac{2x}{x-2}-1\leqslant0$，

即$\dfrac{x+2}{x-2}\leqslant 0$，即$\begin{cases}(x+2)(x-2)\leqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$.

求得 $-2\leqslant x<2$，

可得原不等式的解集为$[-2,2)$.

故答案为：$[-2,2)$.

【点评】本题主要考查分式不等式、一元二次不等式的解法，属于基础题.

14.【分析】令 $f(x)=x^2+1$，$x\in\mathbf{R}$，分析其奇偶性与值域即可.

【解答】解：令 $f(x)=x^2+1$，$x\in\mathbf{R}$，

则 $f(-x)=f(x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，

又 $f(x)=x^2+1\geqslant 1$，

故其值域为$[1,+\infty)$，

故 $f(x)=x^2+1$ 符合要求.

故答案为：$f(x)=x^2+1$（$x\in\mathbf{R}$）（答案不唯一）.

【点评】本题考查函数奇偶性的性质以及应用，属于基础题.

15.【分析】(1) $a=0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$，利用分类讨论法求出 $f(x)$ 的最大值；

(2) 根据 $a>0$ 时 $f(x)=ax$ 是单调增函数，没有最大值，得出 $a\leqslant 0$，再讨论 $a<0$ 时，$f(x)$ 取得最大值时满足的条件，即可求出 a 的取值范围.

【解答】解：(1) $a=0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$，

因为 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-x^2+1$ 是二次函数，有最大值为 $f(0)=1$，$x>1$ 时，$f(x)=0$；

所以 $f(x)$ 的最大值为 1；

(2) 因为 $a>0$ 时，$f(x)=ax$ 是单调增函数，没有最大值，所以 $a\leqslant 0$；

$a<0$ 时，$f(x)=-x^2+ax+1$ 在 $x=\dfrac{a}{2}$时取得最大值 $f(\dfrac{a}{2})=\dfrac{a^2}{4}+1$，

$f(x)=ax$ 是单调减函数，没有最大值；

令$\dfrac{a^2}{4}+1\geqslant a$，得 $(a-2)^2\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a<0$；

综上，$f(x)$ 存在最大值时，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

故答案为：$(-\infty,0]$.

【点评】本题考查了分段函数的性质应用问题，也考查了分类讨论思想，是中档题.

三、解答题共 5 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】(Ⅰ) 先求出集合 A，B，然后结合集合的并集运算即可求解；

(Ⅱ) 结合集合的交集及补集运算即可求解.

【解答】解：因为集合 $A=\{x|x^2-3x-4>0\}=\{x|x>4$ 或 $x<-1\}$，集合 $B=\{x|a-x\leqslant 0\}=\{x|x\geqslant a\}$，

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$B=\{x|x\geqslant 2\}$，

则 $A\cup B=\{x|x\geqslant 2$ 或 $x<-1\}$；

（Ⅱ）因为 $\complement_R A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，

若 $B\cap\complement_R A\neq\varnothing$，则 $a\leqslant 4$，

故实数 a 的取值范围为 $\{a|a\leqslant 4\}$.

【点评】本题主要考查了集合的并集运算及集合的交集及补集运算，属于基础题.

17.【分析】（Ⅰ）根据乙投篮命中的概率和乙、丙两人都投篮命中的概率求解即可；

（Ⅱ）根据相互独立事件的乘法公式求解即可；

（Ⅲ）根据相互独立事件的乘法公式求解即可.

【解答】解：（Ⅰ）由题意，乙投篮不中的概率为 0.3，则乙投篮命中的概率为 0.7，

又乙、丙两人都投篮命中的概率为 0.35，则丙投篮命中的概率为 $\frac{0.35}{0.7}=0.5$；

（Ⅱ）甲和乙命中，丙不中的概率为 $0.6\times0.7\times(1-0.5)=0.21$；

（Ⅲ）恰有一人命中的概率为 $0.6\times(1-0.7)\times(1-0.5)+(1-0.6)\times0.7\times(1-0.5)+(1-0.6)\times(1-0.7)\times0.5=0.29$.

【点评】本题考查相互独立事件的乘法公式的应用，属于基础题.

18.【分析】(1) 将点（1，1）代入函数解析式，求解 m 的值即可；

(2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，利用定义证明即可.

【解答】解：(1) 将点（1，1）代入函数 $f(x)=\frac{3x-m}{2x+2}$ 中，可得 $1=\frac{3-m}{2+2}$，解得 $m=-1$.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，证明如下.

由 (1) 可得 $f(x)=\frac{3x+1}{2x+2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{x+1}$，

任取 $x_1<x_2\in(-\infty,-1)$，则 $f(x_1)-f(x_2)=(\frac{3}{2}-\frac{1}{x_1+1})-(\frac{3}{2}-\frac{1}{x_2+1})$

$=\frac{1}{x_2+1}-\frac{1}{x_1+1}=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$，因为 $x_1<x_2\in(-\infty,-1)$，

则 $x_1-x_2<0$，$x_1+1<0$，$x_2+1<0$，即 $(x_1+1)(x_2+1)>0$，

所以 $\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增.

【点评】本题主要考查函数的单调性的判断与证明，考查运算求解能力，属于基础题.

19.【分析】（Ⅰ）根据平均数公式，即可求解；

（Ⅱ）利用列举样本空间的方法，结合古典概型概率 公式，即可求解；

（Ⅲ）结合方差的定义和公式，即可判断.

【解答】解：（Ⅰ）设甲队的平均分为 $\overline{x_1}$，则 $\overline{x_1}=\frac{88+91+93+96}{4}=92$，

所以甲队的平均分为 92；

（Ⅱ）分别从甲、乙两队的 4 次比赛得分中各随机选取 1 次，有（88，89），（88，94），（88，97），（88，92），（91，89），（91，94），（91，97），（91，92），（93，89），（93，94），（93，97），（93，92），（96，89），（96，94），（96，97），（96，92），共包含 16 个基本事件，

这 2 个比赛得分之差的绝对值为 1 包含：（88，89），（91，92），（93，94），（93，92），（96，97），共 5 个基本事件，

所以这 2 个比赛得分之差的绝对值为 1 的概率 $P=\frac{5}{16}$；

（Ⅲ）乙队的平均分为 $\overline{x_2}=\frac{89+94+97+92}{4}=93$，

则 $s_1^2=\frac{1}{4}[(88-92)^2+(91-92)^2+(93-92)^2+(96-92)^2]=8.5$，$s_2^2=\frac{1}{4}[(89-93)^2+(94-93)^2+(97-93)^2+(92-93)^2]=8.5$，

所以 $s_1^2=s_2^2$.

【点评】本题主要考查了平均数和方差的计算，考查了古典概型的概率公式，属于基础题.

20.【分析】（Ⅰ）由 $f(0)=0$ 可得 a 的值；由函数的奇偶性的定义可判断 $f(x)$ 的奇偶性；

（Ⅱ）由不等式恒成立思想和有解的思想，结合指数函数、二次函数的性质，解不等式可得所求取值范围.

【解答】解：（Ⅰ）若 0 是函数 $f(x)$ 的一个零点，则 $f(0)=0$，即 $1+a=0$，解得 $a=-1$，

即有 $f(x)=e^x-e^{-x}$，$x\in\mathbf{R}$，

由 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$，可得 $f(x)$ 为奇函数；

（Ⅱ）由 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>0$，可得 $e^x+ae^{-x}>0$ 恒成立，即 $a>-e^{2x}$，

而 $-e^{2x}<0$，则 $a\geqslant 0$；

又 $\exists x_0\in[-1,1]$，使得 $f(x_0)\leqslant 4$，即 $e^x+ae^{-x}\leqslant 4$ 在 $x\in[-1,1]$ 成立，

即有 $a\leqslant e^x(4-e^x)=-(e^x-2)^2+4$，

当 $e^x=2$，即 $x=ln2\in[-1,1]$ 时，$y=-(e^x-2)^2+4$ 取得最大值 4，则 $a\leqslant 4$，

综上，可得 a 的取值范围是 $[0,4]$.

【点评】本题考查函数的零点、奇偶性和不等式恒成立、有解的条件，考查转化思想和运算能力、推理能力，属于中档题.