# 2024 北京顺义高一（上）期末

# 数　学

| 考生须知 | |
|---|---|
| 考 | 1. 本试卷共 5 页，共两部分，21 道小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。 |
| 生 | 2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和班级。 |
| 须 | 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 |
| 知 | 4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答。 |

## 第一部分（选择题 共 40 分）

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.**

1. 已知集合 $M=\{x\mid -2\le x<2\}$，$N=\{x\mid x+1\ge 0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x\mid -1\le x<2\}$　　B. $\{x\mid -1<x<2\}$　　C. $\{x\mid -2\le x\le -1\}$　　D. $\{x\mid 1\le x<2\}$

2. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$ 的定义域为

A. $(0,+\infty)$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D. $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$

3. 命题“$\exists x\in \mathrm{R}$，使得 $|x-2|\le 3$”的否定为

A. $\exists x\in \mathrm{R}$，$|x-2|\ge 3$　　B. $\forall x\in \mathrm{R}$，都有 $|x-2|\ge 3$

C. $\exists x\in \mathrm{R}$，$|x-2|>3$　　D. $\forall x\in \mathrm{R}$，都有 $|x-2|>3$

4. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=x^{-2}$　　B. $y=-\ln x$　　C. $y=\dfrac{1}{2^x}$　　D. $y=e^{|x|}$

5. 已知 $a=2^{-\pi}$，$b=\log_{0.3}2$，$c=\log_2 3$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系是

A. $c>a>b$　　B. $b>c>a$　　C. $a>c>b$　　D. $c>b>a$

6. $a,b,c$ 是任意实数，如果 $a>b>c$，那么下列不等式一定成立的是

A. $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$　　B. $a+b>2c$　　C. $a|c|<b|c|$　　D. $a+b>c$

7. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+1$，则“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

8. 燕子每年秋天都要从北方飞向南方过冬. 专家发现两岁燕子的飞行速度 $v$（单位：$m/s$）可以表示为

$v=5\log_2\dfrac{Q}{10}$，其中 $Q$ 表示燕子的耗氧量的单位数. 某只两岁燕子耗氧量为 $Q_1$ 时的飞行速度为 $v_1$，耗氧量为 $Q_2$ 时的飞行速度为 $v_2$，且 $v_2-v_1=7.5\,(m/s)$，求 $\dfrac{Q_2}{Q_1}$ 的值

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt[3]{4}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 1\\ \log_2 x, & x>1\end{cases}$，如果方程 $f(x)=-x+k$ 有两个不相等的实数根，那么实数 $k$ 的取值范围是

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(1,2]$

10. 悬链线指的是一种曲线，如铁塔之间悬垂的电线, 横跨深涧的观光索道的电缆等等. 这些现象中都有相似的曲线形态, 这些曲线在数学上被称为悬链线. 悬链线的方程为 $y=\dfrac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$，其中 $c$ 为参数. 当 $c=1$ 时，该方程就是双曲余弦函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，类似的我们有双曲正弦函数 $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，下列说法错误的是：

A. $[f(x)]^2-[g(x)]^2=1$　　B.函数 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的值域 $(-1,1)$

C. $\forall x\in\mathrm{R}$，$f(x)>x^2$ 恒成立　　D.方程 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=-x+1$ 有且只有一个实根

## 第二部分（非选择题　共 110 分）

**二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡上.**

11. 已知幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，那么 $f(4)=$_______.

12. 如果圆心角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的扇形的弧长为 $\pi$，那么该扇形面积为_______.

13. 已知函数 $f(x)=1-x-\dfrac{2}{x}\ (x>0)$，则当 $x=$______ 时，函数 $f(x)$ 取到最大值且最大值为_______.

14. 若点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $B\left(\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$，则角 $\alpha$ 的一个取值为________.

15. 如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 $ACB$，函数 $g(x)$ 是定义域为 $\mathrm{R}$ 的奇函数，满足 $g(4-x)+g(x)=0$，且当 $x\in(0,2]$ 时，$g(x)=f(x)$，给出下列四个结论：

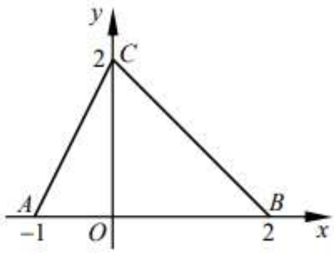
①$g(0)=0$；

②函数 $g(x)$ 在 $(-4,8)$ 内有且仅有 3 个零点；

③ $g\left(-\frac{7}{2}\right)>g(2024)>g(3)$；

④不等式 $f(x)\le\left|\log_2(x+1)\right|$ 的解集

$\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,2]$.




其中正确结论的序号是

三、解答题共 6 道题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.（本小题 13 分）

已知不等式 $x^2-x-6\le 0$ 的解集为 $A$，非空集合 $B=\{x\,|\,m-1<x<2m+1\}$.

（Ⅰ）求集合 $A$；

（Ⅱ）当 $m=2$ 时，求 $A\cup B$；

（Ⅲ）若 $B\subseteq A$，求实数 $m$ 的取值范围.

17.（本小题 14 分）

在平面直角坐标系 $xoy$ 中，角 $\alpha$ 的顶点与原点 $o$ 重合，始边与 $x$ 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于第三象限点 $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

（Ⅰ）求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值；

（Ⅱ）若角 $\alpha$ 的终边绕原点 $o$ 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，与单位圆交于点 $Q$，求点 $Q$ 的坐标.

18.（本小题 14 分）

已知 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，且 $\alpha$ 的范围是______.

从① $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，② $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，③ $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，④ $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，这四个选项中选择一个你认为恰当的选项填在上面的横线上，并根据你的选择，解答以下问题：

（Ⅰ）求 $\sin\alpha$， $\tan\alpha$ 的值；

（Ⅱ）化简求值：$\dfrac{\sin(-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(2024\pi+\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$．

19.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+4}$ 是定义在 $R$ 上的奇函数.

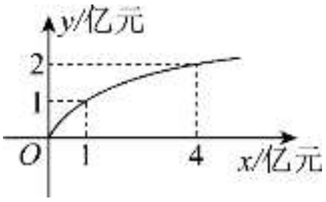
（Ⅰ）求实数 $a$ 的值；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明；

（Ⅲ）若 $g(x)=f(x)-k(k\in R)$ 有两个零点，请写出 $k$ 的范围（直接写出结论即可）.

20.（本小题 14 分）

某公司已成功研发 $A$，$B$ 两种产品.该公司研发已经耗费资金 2 亿元，现在准备投入资金进行生产.经市场调查与预测，生产 $A$ 产品的毛收入与投入的资金成正比，已知每投入 1 亿元，公司获得毛收入 0.25 亿元；生产 $B$ 产品的毛收入 $y$（亿元）与投入的资金 $x$（亿元）的函数关系为 $y=kx^a(x>0)$，其图象如图所示.




（Ⅰ）试分别求出生产 $A,B$ 两种产品的毛收入 $y$（亿元）与投入资金 $x$（亿元）的函数关系式；

（Ⅱ）如果公司只生产一种产品，那么生产哪种产品毛收入更大？

（Ⅲ）现在公司准备投入 40 亿元资金同时生产 $A,B$ 两种产品，设投入 $x$ 亿元生产 $B$ 产品，用 $f(x)$ 表示公司所获净利润，当 $x$ 为多少时，可以获得最大净利润？并求出最大净利润.

（净利润＝$A$ 产品毛收入+$B$ 产品毛收入-研发耗费资金）

21.（本小题 15 分）

对于定义域为 $I$ 的函数 $f(x)$，如果存在区间 $[m,n]\subseteq I$，使得 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上是单调函数.且函数 $y=f(x),x\in[m,n]$ 的值域是 $[m,n]$，则称区间 $[m,n]$ 是函数 $f(x)$ 的一个“优美区间”

（Ⅰ）判断函数 $y=x^2(x\in R)$ 和函数 $y=3-\dfrac{4}{x}(x>0)$ 是否存在“优美区间”？

（直接写出结论，不要求证明）

（Ⅱ）如果函数 $f(x)=x^2+a$ 在 $R$ 上存在“优美区间”，求实数 $a$ 的取值范围.

# 参考答案

一、ACDD ABAC BC

二、11. 2　　　12. $\frac{3\pi}{4}$　　　13. $\sqrt{2}$，$1\text{-}2\sqrt{2}$

14. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ $\left(\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right)$　　　15. ①③④

16.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$.　　　-----------------3 分

（Ⅱ） 当 $m=2$ 时， $B=\{x|1<x<5\}$，　　　-----------------5 分

$\therefore A\cup B=\{x|-2\le x<5\}$　　　-----------------7 分

（Ⅲ）若 $B\subseteq A$ 则 $\begin{cases}2m+1\le 3\\ m-1\ge -2\\ m-1<2m+1\end{cases}$，　　　-----------------10 分

所以 $\begin{cases}m\le 1\\ m\ge -1\\ m>-2\end{cases}$，　　　-----------------12 分

综上：$-1\le m\le 1$.　　　-----------------13 分

17.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）根据三角函数的定义得：

$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$， $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ---------------------4 分

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ------------6 分

（Ⅱ）由已知可得：$Q\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$， $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

所以 $Q\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ -----------------------14 分

18.（本小题 14 分）

解：选②$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

（Ⅰ）$\because \cos\alpha=-\frac{5}{13}$， $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{12}{13}$. ----------------------3 分

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{12}{5}$. -------------------------------------6 分

（Ⅱ）$\dfrac{\sin(-\alpha)\bullet\cos(\pi+\alpha)}{\sin(2024\pi+\alpha)\bullet\tan(\pi-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha\bullet(-\cos\alpha)}{\sin\alpha\bullet(-\tan\alpha)} = -\dfrac{25}{156}$. ---14 分

选③$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

（Ⅰ）$\because \cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$， $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

所以 $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2} = -\dfrac{12}{13}$. --------3 分

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{12}{5}$ . ----------------------------6 分

（Ⅱ）$\dfrac{\sin(-\alpha)\bullet\cos(\pi+\alpha)}{\sin(2024\pi+\alpha)\bullet\tan(\pi-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha\bullet(-\cos\alpha)}{\sin\alpha\bullet(-\tan\alpha)} = \dfrac{25}{156}$. ----------14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+4}$ 是定义在$R$上的奇函数，

所以 $f(-x)+f(x)=0$. ----------------------2 分

即 $\dfrac{-x+a}{(-x)^2+4}+\dfrac{x+a}{x^2+4}=\dfrac{-x+a+x+a}{x^2+4}=0$

亦即 $\dfrac{2a}{x^2+4}=0$

所以 $a=0$. ----------------------4 分

（Ⅱ）函数 f(x) 在区间$[2,+\infty)$上单调递减，--------------5 分

证明如下：

由（Ⅰ）可知 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

任取 $x_2>x_1\geq 2$ 则

$f(x_2)-f(x_1)$

$=\dfrac{x_2}{x_2^2+4}-\dfrac{x_1}{x_1^2+4}$ ----------------------6 分

$=\dfrac{x_2(x_1^2+4)-x_1(x_2^2+4)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}=\dfrac{(x_2x_1^2-x_1x_2^2)+4(x_2-x_1)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$

$=\dfrac{x_2x_1(x_1-x_2)+4(x_2-x_1)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$ ———————————————8 分

$=\dfrac{(x_1x_2-4)(x_1-x_2)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$ . ———————————————9 分

由 $x_2>x_1\ge 2$ ，得 $x_1x_2>4, x_1-x_2<0$， ———————————————10 分

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$ ———————————————11 分

所以函数 f(x) 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递减. ———————————————12 分

（Ⅲ） $k\in(-\frac{1}{4},0)\cup(0,\frac{1}{4})$. ———————————————15 分

20. （本小题 14 分）

解（Ⅰ）

设投入资金 $x$ 亿元，则生产 $A$ 产品的毛收入 $y=\frac{x}{4}(x>0)$. ············2 分

由题意可知，函数 $y=kx^a$ 的图象过点（1,1），（4,2），

将 $(1,1),(4,2)$ 代入 $y=kx^a$，

得 $\begin{cases}k=1\\ k\cdot 4^a=2\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}k=1\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$，

$\therefore$ 生产 $B$ 产品的毛收入 $y=\sqrt{x}(x>0)$. ············5 分

（Ⅱ）由 $\frac{x}{4}>\sqrt{x}$，得 $x>16$；

由 $\frac{x}{4}=\sqrt{x}$，得 $x=16$；

由 $\frac{x}{4}<\sqrt{x}$，得 $0<x<16$. ············8 分

$\therefore$ 当投入资金大于 16 亿元时，生产 $A$ 产品的毛收入更大；

当投入资金等于 16 亿元时，生产 $A,B$ 产品的毛收入相等；

当投入资金小于 16 亿元时，生产 $B$ 产品的毛收入更大. ·········9 分

（Ⅲ）由题意知投入 $x$ 亿元生产 $B$ 产品，则投入 $(40-x)$ 亿元资金生产 $A$ 产品，

公司所获净利润 $f(x)=\frac{40-x}{4}+\sqrt{x}-2$， ············11 分

令 $\sqrt{x}=t$，则 $t^2=x$，

$\therefore f(x)=\dfrac{40-t^2}{4}+t-2=-\dfrac{1}{4}(t-2)^2+9$，

故当$t=2$，即$x=4$亿时，公司所获净利润最大，最大净利润为 9 亿元. …………14 分

21. （本小题 15 分）

解（I）$y=x^2\ge 0$，$y=x^2$在$[0,+\infty)$上单调递增，

由$x^2=x$得$x=0$或 1，存在优美区间是$[0,1]$； …………2 分

$y=3-\dfrac{4}{x}(x>0)$是增函数，若存在优美区间$[m,n]$，

则$\begin{cases}3-\dfrac{4}{m}=m\\3-\dfrac{4}{n}=n\end{cases}$，无解，不合题意，不存在优美区间； …………4 分

（II）函数$f(x)=x^2+a$在$R$上存在“优美区间”，设$[m,n]$是其一个优美区间，

$f(x)$在$(-\infty,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上递增，

若$m\ge 0$，则$\begin{cases}f(m)=m\\f(n)=n\end{cases}$，即$f(x)=x$有两个不等的非负根$x_1,x_2$，……6 分

所以，方程$x^2+a=x$，即$x^2-x+a=0$，$\Delta=1-4a>0$，$a<\dfrac{1}{4}$，$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=a\end{cases}$，则$a\ge 0$，

所以$0\le a<\dfrac{1}{4}$； …………9 分

若$n\le 0$，则$\begin{cases}f(m)=n\\f(n)=m\end{cases}$， …………10 分

即$\begin{cases}m^2+a=n\\n^2+a=m\end{cases}$，

两式相减得$(m+n)(m-n)=n-m$，$m+n=-1$， …………11 分

亦即$\begin{cases}m^2+a=-1-m\\n^2+a=-1-n\end{cases}$，

所以方程$x^2+a=-1-x$，即$x^2+x+a+1=0$，有两个不等的非正根$x_1,x_2$，

$\Delta=1-4(a+1)>0$，$a<-\dfrac{3}{4}$，$x_1+x_2=-1<0$满足题意，$x_1x_2=a+1\ge 0$，$a\ge -1$，

所以$-1\le a<-\dfrac{3}{4}$； …………14 分

综上，$a$的取值范围是$-1\le a<-\dfrac{3}{4}$或$0\le a<\dfrac{1}{4}$. …………15 分